

Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

20 febbraio 2015

1. Rispondere alle seguenti domande.

i) Quali sono gli elementi dell'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : (12 - 5iz)(z - i) = z^3 + i\}?$$

ii) Per quali $R \geq 0$, $\exists w \in \mathbb{C}$ tale che $\forall z \in A$, $|w - z| = R$?

2. Calcolare il seguente limite al variare di $a \in \{1, 2, 3\}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \left((1 + x^a)^{1/x} - e^x \right)}{\sqrt{1 + x^{3a}} - 1}.$$

3. Dimostrare che per ogni intero $n > 1$,

$$\frac{\ln(n)}{n} < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

4. Per $a \in (0, 1)$ sia

$$F_a(x) = \frac{(7a - 3)(x - a) + (a + 3)|x - a|}{2a(1 - a)}.$$

Il grafico $\{(x, F_a(x)) : x \in [0, 1]\}$ è una linea spezzata e sia $L(a)$ la sua lunghezza.

Determinare l'insieme

$$\{L(a) : a \in (0, 1)\}.$$

5. Sia $f_a(x) = \frac{a}{1 + |x|}$.

i) Esiste $a > 0$ tale che l'equazione

$$f_a(x) = 3 - 2 \sin(x) - 2 \cos(x)$$

non ammetta soluzioni reali?

ii) Esiste $a > 0$ tale che ci siano due rette tangenti al grafico di f_a ortogonali tra loro?