Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 25 giugno 2014

Nome e cognome: $\sqcup\!\!\sqcup$

---

1. Determinare una funzione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ della forma $F(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ tale che

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad F(F(F(z))) = 2(i-1)z + 13.$$

Svolgimento: Si ha che

$$F(F(F(z))) = a(a(az+b)+b)+b$$
$$= a^3 z + (a^2+a+1)b = 2(i-1)z + 13.$$

Così

$$\begin{cases} a^3 = 2(i-1) = 2\sqrt{2}\, e^{i3\pi/4} \\ (a^2+a+1)b = 13 \end{cases}.$$

Per a possiamo prendere una delle tre possibili radici terze di $2\sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}$.

Ad esempio $a = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = 1+i$. In tal caso

$$a^2+a+1 = (1+i)^2 + (1+i) + 1 = \cancel{1} - \cancel{1} + 2i + 1 + i + 1$$
$$= 2+3i$$

Quindi

$$b = \frac{13}{a^2+a+1} = \frac{13}{2+3i} = 13 \cdot \frac{(2-3i)}{|2-3i|^2} = \frac{\cancel{13}}{\cancel{13}} \cdot (2-3i)$$

Infine $F(z) = (1+i)z + (2-3i)$.

$\square$

2. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{i)} \lim_{n\to+\infty} (2-\sqrt[n]{2})^n, \qquad \text{ii)} \lim_{x\to\pi/4} \frac{\cos(2x)\cdot(\sin(x)-\cos(x))}{(\ln(\tan(x)))^2}.$$

Svolgimento:

i) $$\left(2-\sqrt[n]{2}\right)^n = \left(1+\left(1-e^{\frac{\ln 2}{n}}\right)\right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ e^x = 1+x+o(x)}}{=} \left(1+\left(-\frac{\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^n$$

$$= \exp\left(n\cdot\ln\left(1-\frac{\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \ln(1+x)=x+o(x)}}{=} \exp\left(n\left(-\frac{\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-\ln 2+o(1)\right) \to \frac{1}{2}$$

$\square$

ii) Sia $t = x-\frac{\pi}{4} \to 0$. Allora

$$\cos(2x) = \cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(2t) = -2t+o(t),$$

$$\operatorname{sen}(x)-\cos(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{sen} t = \sqrt{2}t+o(t),$$

$$\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} t+1}{1-\operatorname{tg} t} = \frac{1+t+o(t)}{1-t+o(t)} = 1+2t+o(t),$$

$$\ln(\operatorname{tg}(x)) = \ln(1+2t+o(t)) = 2t+o(t).$$

Quindi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dots = \lim_{t\to 0} \frac{(-2t+o(t))(\sqrt{2}t+o(t))}{(2t+o(t))^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-2\sqrt{2}\,t+o(t)}{4t^2+o(t)} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\square$

3. Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

i) Per ogni $n \geq 1$ e per ogni $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numeri reali positivi tali che il loro prodotto è uguale a 1, vale la disuguaglianza

$$2^n \leq (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n).$$

ii) Per ogni $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ numeri reali positivi tali che il loro prodotto è uguale a 1, vale la disuguaglianza

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{10}) \leq 10^{10}.$$

Svolgimento: i) VERO. Per induzione rispetto a n.

Per $n=1$, $a_1 = 1$ e $2^1 \overset{?}{\leq} (1+a_1) = 2$ ok

se $n \geq 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Sia $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdot a_{n+1} = 1$.

Possiamo supporre che $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1}$.

Poniamo $A = a_1 a_{n+1}$ così $\underbrace{a_2 \cdot \ldots a_n \cdot A}_{n \text{ elementi}} = 1$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{P(n)}{\leq} 2 \cdot (1+a_2) \cdots (1+a_n)(1+A)$$

$$\overset{?}{\leq} (1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_n)(1+a_{n+1}).$$

Basta ancora dimostrare che

$$2(1+A) \overset{?}{\leq} (1+a_1)(1+a_{n+1})$$

ossia

$$2 + 2a_1 a_{n+1} \overset{?}{\leq} 1 + a_1 + a_{n+1} + a_1 a_{n+1}$$

$$\underbrace{1 - a_1 - a_{n+1} + a_1 a_{n+1}}_{\underset{\geq 0}{(1-a_1)}\ \underset{\leq 0}{(1-a_{n+1})}} \overset{?}{\leq} 0 \quad \text{ok}$$

perché se $a_1 \cdots a_{n+1} = 1$ e $a_1 \leq \cdots \leq a_{n+1}$ allora necessariamente $a_1 \leq 1$ e $a_{n+1} \geq 1$.

In alternativa si può anche ragionare nel seguente modo. Per $i = 1, 2, \dots, n$,

$$(1-\sqrt{a_i})^2 \geq 0 \implies 2\sqrt{a_i} \leq 1 + a_i .$$

Quindi moltiplicando membro a membro queste n disuguaglianze si ottiene

$$\underbrace{(2\sqrt{a_1})(2\sqrt{a_2})\cdots(2\sqrt{a_n})}_{2^n\sqrt{a_1\cdots a_n} = 2^n.} \leq (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$$

□

ii) FALSO.

Sia $a_1 = x \in (0,1)$ e poniamo $a_2 = \frac{1}{x} > 1$, $a_3 = a_4 = \dots a_{10} = 1$. Allora $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{10} = 1$ e

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_{10}) = (1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot 2^8 \overset{?}{\leq} 10^{10}$$

che è equivalente a

$$2 + x + \frac{1}{x} \leq \frac{10^{10}}{2^8}$$

che non vale per ogni $x \in (0,1)$ perché il primo membro tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$.

Alla stessa conclusione si può arrivare assegnando a x il valore $10^{-10} \in (0,1)$. □

4. Considerare le seguenti questioni.

i) Determinare una successione di numeri reali $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tale che

$$\forall n \geq 1,\ \ \forall x \in [a_n, +\infty), \qquad x^n \leq e^x.$$

ii) Esiste una successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ come in i), tale che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = L \in \mathbb{R}^+$?

Svolgimento: i) Sia $f(x) = x^n e^{-x}$ allora $x^n \leq e^x$ equivale a $f(x) \leq 1$. Notiamo che

$$f'(x) = n x^{n-1} e^{-x} + x^n e^{-x} \cdot (-1) = x^{n-1} e^{-x}(n-x) \leq 0 \quad \text{per } x \geq n$$

e quindi f è decrescente in $[n, +\infty)$.

Basta allora trovare $a_n \geq n$ tale che $f(a_n) \leq 1$.

Ad esempio $a_n = n^2$:

$$f(n^2) = n^{2n} e^{-n^2} = e^{2n \ln n - n^2} = e^{n\overbrace{(2\ln n - n)}^{\leq 0}} \leq 1.$$

$\square$

ii) NO. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = L \in \mathbb{R}^+$ allora per definizione di limite, $\exists\, n_0 > 0 : \forall n > n_0,\ a_n \leq 2Ln$

Quindi se $\forall n \geq 1, \forall x \in [a_n, +\infty)$, $x^n e^{-x} \leq 1$

allora per $x = 2Ln$ si avrebbe che $\forall n \geq 1$

$$1 \geq (2Ln)^n e^{-2Ln} = \exp(-2Ln + n\ln(2L) + n\ln n)$$

ma questo non è possibile perché il secondo membro tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$.

$\square$

5. Rispondere alle seguenti domande.

i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione derivabile due volte in $\mathbb{R}$. Se la funzione $\ln(f)$ è convessa in $\mathbb{R}$ allora anche la funzione f è convessa in $\mathbb{R}$?

ii) Esiste un polinomio di secondo grado $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tale che la funzione $\ln(P)$ è convessa in $\mathbb{R}$?

Svolgimento: i) VERO. Dato che f è convessa in $\mathbb{R}$

$$\ln(f(x)) \xrightarrow{D} \frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{D} \frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Siccome $f(x)>0$ questo implica che

$$f''(x) \geq \frac{(f'(x))^2}{f(x)} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e quindi f è convessa in $\mathbb{R}$.

$\square$

ii) NO. Sia $P(x) = ax^2+bx+c$ un generico polinomio di secondo grado. Dato che $P(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^+$ si ha che $a>0$.

Dal punto i) $\ln(P)$ è convessa in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$P''(x)P(x)-(P'(x))^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ma $P'(x) = 2ax+b$, $P''(x) = 2a$ e quindi

$$P''(x)P(x) - (P'(x))^2 = 2a(ax^2+bx+c) - (2ax+b)^2$$

$$= -2a^2x^2 - 2abx + 2ac - b^2 \overset{?}{\geq} 0.$$

Tale disuguaglianza non può valere $\forall x \in \mathbb{R}$ perché il primo membro tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$.

$\square$