Prova scritta di Analisi Matematica I - C. L. in Matematica - 17 febbraio 2014

Nome e cognome: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

---

1. Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi:

i) $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |1+z|^2 \geq 1 + 2\,\mathrm{Im}(z)\} \cup \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^4 + 4 = 0\}$,

ii) $B = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |1+z|^4 \geq 1 + 4\,\mathrm{Re}(z)\} \cap \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^4 + |z|^4 = 0\}$.

Svolgimento:

i) Posto $z = x+iy$, si ha che

$$|1+z|^2 \geqslant 1 + 2\,\mathrm{Im}(z) \iff (x+1)^2 + y^2 \geqslant 1 + 2y$$

$$\iff (x+1)^2 + (y-1)^2 \geqslant 2$$

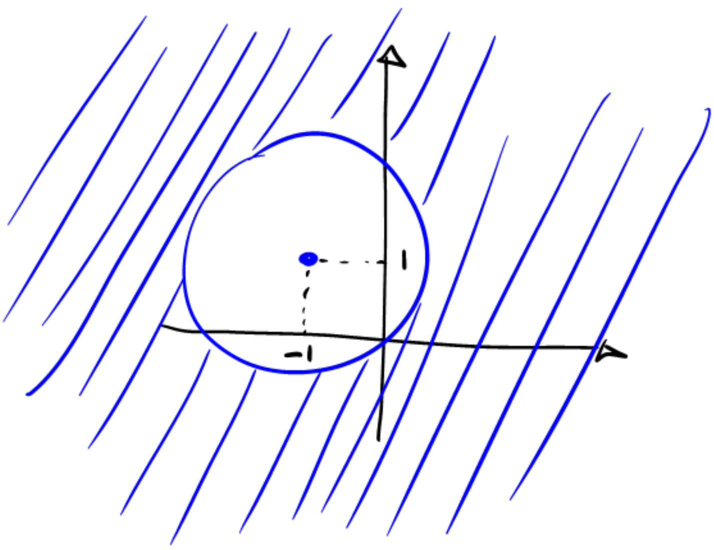
che in $\mathbb{C}$ rappresenta il complementare del cerchio aperto di centro $(-1, 1)$ e raggio $\sqrt{2}$.

L'equazione $z^4 = -4 = 4e^{i\pi}$ ha 4 soluzioni

$$z_k = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)} = (1+i) \cdot i^k \quad \text{per } k = 0,1,2,3$$

ossia i punti $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

Quindi l'insieme A è dato da



$\square$

ii) Posto $z = x+iy$, si ha che

$$|1+z|^4 \geq 1+4\,\mathrm{Re}(z) \iff \left((1+x)^2+y^2\right)^2 \geq 1+4x$$

$$\iff (1+x)^4 + y^4 + 2(1+x)^2 \cdot y^2 \geq 1+4x$$

che vale $\forall x,y \in \mathbb{R}$ perché $y^4 + 2(1+x)^2 y^2 \geq 0$ e

$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4 \geq 1+4x$$

$$\iff 6x^2+4x^3+x^4 = x^2(6+4x+x^2) \geq 0$$

che vale $\forall x \in \mathbb{R}$ perché $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 6 < 0$.

Quindi $\{z \in \mathbb{C} : |1+z|^4 \geq 1+4\,\mathrm{Re}(z)\} = \mathbb{C}$.

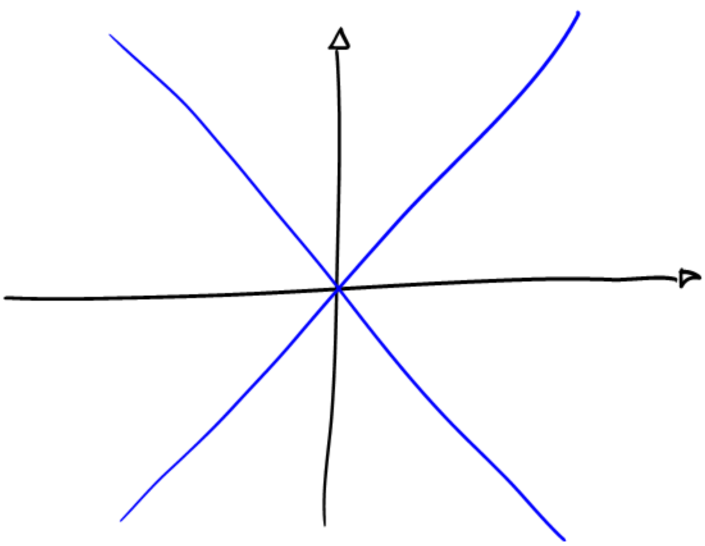
Inoltre $z^4 + |z|^4 = z^4 + z^2 \cdot \bar{z}^2 = z^2(z^2+\bar{z}^2) = 0$

è equivalente a $z=0 \vee z^2+\bar{z}^2 = 0$ ma

$$z^2+\bar{z}^2 = (x+iy)^2 + (x-iy)^2 = x^2 + \cancel{2ixy} - y^2 + x^2 - \cancel{2ixy} - y^2$$

$$= 2(x+y)(x-y) = 0 \iff y = x \vee y = -x.$$

Quindi l'insieme B è dato da



$\square$

2. Calcolare il seguente limite al variare di $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\tan(x)) - 2x}{\sin(\sin(4x)) + ax}.$$

Svolgimento: Dato che $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ e $\operatorname{sen} x = x + o(x)$,

$$\frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{tg} x) - 2x}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 4x) + ax} = \frac{\operatorname{sen}(2x + o(x)) - 2x}{\operatorname{sen}(4x + o(x)) + ax}$$

$$= \frac{2x + o(x) - 2x}{4x + o(x) + ax} = \frac{o(x)}{(4+a)x + o(x)}$$

Quindi se $4+a \neq 0$ ossia $a \neq -4$ il limite per $x \to 0$ è 0.

Se $a = -4$, dato che $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$,

$$\lim_{x\to 0} (\ldots) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2\operatorname{tg} x)\cdot 2(1+\operatorname{tg}^2 x) - 2}{\cos(\operatorname{sen} 4x)\cdot\cos(4x)\cdot 4 - 4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x + o(x))\cdot 2(1 + x^2 + o(x^2)) - 2}{\cos(4x + o(x))\left(1 - \frac{(4x)^2}{2} + o(x^2)\right)\cdot 4 - 4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right)\cdot 2(1 + x^2 + o(x^2)) - 2}{\left(1 - \frac{(4x)^2}{2} + o(x^2)\right)\cdot\left(1 - \frac{(4x)^2}{2} + o(x^2)\right)\cdot 4 - 4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left((1 - 2x^2 + o(x^2))(1 + x^2 + o(x^2)) - 1\right)\cdot \cancel{2}^{\,1}}{\left((1 - 8x^2 + o(x^2))^2 - 1\right)\cdot \cancel{4}_{\,2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - 2x^2 + x^2 + o(x^2) - \cancel{1}}{2(\cancel{1} - 16x^2 + o(x^2) - \cancel{1})} = \frac{-1}{-32} = \frac{1}{32}.$$

$\square$

3. Per n intero positivo sia
$$x_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}.$$

i) Dimostrare che
$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \quad x_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}.$$

ii) Dimostrare che la successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge ad un limite $L \in (0,1)$.

iii) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x_n}} \binom{2n}{n} \right)^{1/n}$.

Svolgimento:

Si noti che $\dfrac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \dfrac{(2k)^2-1}{(2k)^2} = 1 - \dfrac{1}{4k^2}$.

i) Per induzione su n.

Se $n=1$ allora $x_1 = \dfrac{1\cdot 3}{4} \overset{?}{\geq} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ ok.

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 - \frac{1}{4(n+1)^2}\right) \overset{P(n)}{\geq} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\right)\left(1 - \frac{1}{4(n+1)^2}\right) \overset{?}{\geq} \frac{1}{2} + \frac{1}{4(n+1)}$$

Così, svolgendo otteniamo,

$$\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{8(n+1)^2} - \frac{1}{16n(n+1)^2} \overset{?}{\geq} \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4(n+1)}$$

$$4(n+1)^2 - 2n - 1 \overset{?}{\geq} 4n(n+1)$$

$$\cancel{4n^2} + 8n + 4 - 2n - 1 \overset{?}{\geq} \cancel{4n^2} + 4n$$

$$2n + 3 \overset{?}{\geq} 0 \quad \text{ok.}$$

$\square$

ii) Dato che $x_{n+1} = x_n \cdot \overbrace{\left(1 - \frac{1}{4(n+1)^2}\right)}^{<1} < x_n$, la successione è strettamente decrescente.

Inoltre $\frac{3}{4} = x_1 \geq x_n \underset{(i)}{\geq} \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \geq \frac{1}{2}$ e dunque $x_n \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. Ne segue che $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge ad un limite $L \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \subseteq (0,1)$.

$\square$

iii) Si noti che

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n-1)(2n+1)}{4^n \cdot (n!)^2} = \frac{((2n)!)^2 \cdot (2n+1)}{16^n \cdot (n!)^4}$$

Quindi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}} \cdot \binom{2n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{4^n \cdot \cancel{(n!)^2} \cdot \cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!} \cdot \cancel{(n!)^2} \sqrt{2n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{4}{(2n+1)^{1/2n}} \longrightarrow 4.$$

$\square$

4. Determinare per quali valori di $a > 0$ si ha che

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \max\left(\frac{a(1-x)}{4}, \frac{x-1}{1+a|x|}\right) \leq \frac{1+e^{-2x}}{2}.$$

Svolgimento: La disuguaglianza è equivalente a

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{a(1-x)}{4} \leq \dfrac{1+e^{-2x}}{2} & (1) \\[2ex] \forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{x-1}{1+a|x|} \leq \dfrac{1+e^{-2x}}{2} & (2) \end{cases}$$

Vediamo la (1). Per $x=0$, $\frac{a}{4} \leq \frac{1+1}{2} = 1$.
Quindi è necessario che $a \leq 4$. Verifichiamo che è anche sufficiente.
Se $x \geq 1$ la (1) è ovvia. Se $x < 1$

$$\frac{a(1-x)}{4} \underset{\substack{\uparrow \\ 0<a\leq 4}}{\leq} 1-x \leq \frac{1+e^{-2x}}{2}$$

Vera $\forall x \in \mathbb{R}$ perché $f(x) = \frac{1+e^{-2x}}{2}$ è convessa e $y = 1-x$ è la sua retta nel punto $(0,1)$.

Infatti:

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{-2x} \cdot (-2) = -e^{-2x} \quad e \quad f''(x) = 2e^{-2x}.$$

Così $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$ e

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x+1.$$

Vediamo la (2). Dato che $a>0$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{1+a|x|} = \frac{1}{a} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}$$

è necessario che $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{2}$ ossia $2 \leq a$.

Dimostriamo che è anche sufficiente.

Infatti se $a \geq 2$ allora

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{x-1}{1+a|x|} < \frac{1}{2} < \frac{1+\overbrace{e^{-2x}}^{>0}}{2}$$

perché $2(x-1) < 1 + a|x|$ $\left(2x \leq a|x| \text{ e } -2 < 1\right)$.

Quindi affinché siano verificate entrambe le disuguaglianze (1) e (2) è necessario e sufficiente che $a \in [2,4]$.

$\square$

5. Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

i) Tutte le rette tangenti al grafico della funzione $f(x) = x^3 - x + 1$ intersecano tale grafico in almeno due punti distinti.

ii) Tutte le rette tangenti al grafico della funzione $g(x) = x^2 \cos(x)$ intersecano tale grafico in almeno due punti distinti.

Svolgimento:

i) FALSO. La retta tangente a f nel suo (unico) punto di flesso interseca il grafico in un solo punto. Infatti:

$$f(x) = x^3 - x + 1 \xrightarrow{D} f'(x) = 3x^2 - 1 \xrightarrow{D} f''(x) = 6x$$

f'' $\quad - - - - \quad \underset{0}{\bullet} \quad + + +$ $\qquad$ $x_0 = 0$ punto di flesso

La retta tangente in $x_0 = 0$ è

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -x + 1$$

e le intersezioni sono

$$\begin{cases} y = x^3 - x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x^3 \cancel{-x} \cancel{+1} = \cancel{-x} \cancel{+1} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ unica soluzione.} \end{array}$$

$\square$

ii) VERO. Dimostriamo una proprietà ancora più forte: il grafico della funzione $g(x) = x^2 \cos x$ interseca ogni retta $y = mx + q$ (quindi non solo le sue rette tangenti) in infiniti punti. Infatti si consideri la funzione continua $h(x) = x^2 \cos x - mx - q$ con $m, q \in \mathbb{R}$, e sia $x_k = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Allora $h(x_k) = k^2\pi^2 \cdot (-1)^k - mk\pi - q$ e

$$\lim_{k \to +\infty} h(x_{2k}) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{k \to +\infty} h(x_{2k+1}) = -\infty .$$

Quindi, per definizione di limite, $\exists k_0 > 0$ tale che $\forall k > k_0$, $h(x_{2k}) > 0$ e $h(x_{2k+1}) < 0$.

Così per il teorema degli zeri

$$\forall k > k_0, \ \exists t_k \in (x_{2k}, x_{2k+1}) : \quad h(t_k) = 0$$

ossia la retta $y = mx + q$ interseca il grafico di $g(x) = x^2 \cos x$ in $x = t_k$ per ogni $k > k_0$ (i punti t_k sono distinti!).

□