Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

17 febbraio 2014

1. Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi:

i) $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |1+z|^2 \geq 1 + 2\,\mathrm{Im}(z)\} \cup \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^4 + 4 = 0\}$,

ii) $B = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |1+z|^4 \geq 1 + 4\,\mathrm{Re}(z)\} \cap \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^4 + |z|^4 = 0\}$.

2. Calcolare il seguente limite al variare di $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2\tan(x)) - 2x}{\sin(\sin(4x)) + ax}.$$

3. Per n intero positivo sia

$$x_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}.$$

i) Dimostrare che

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \quad x_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}.$$

ii) Dimostrare che la successione $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge ad un limite $L \in (0,1)$.

iii) Calcolare $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x_n}} \binom{2n}{n} \right)^{1/n}$.

4. Determinare per quali valori di $a > 0$ si ha che

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \max\left(\frac{a(1-x)}{4}, \frac{x-1}{1+a|x|} \right) \leq \frac{1+e^{-2x}}{2}.$$

5. Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni.

i) Tutte le rette tangenti al grafico della funzione $f(x) = x^3 - x + 1$ intersecano tale grafico in almeno due punti distinti.

ii) Tutte le rette tangenti al grafico della funzione $g(x) = x^2 \cos(x)$ intersecano tale grafico in almeno due punti distinti.