

Prova scritta di Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Matematica - Università di Roma "Tor Vergata"

5 febbraio 2013

1. Siano $z, w \in \mathbb{C}$ tali che $\bar{w}z \neq 1$ e sia $f_w(z) = \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$.
- Calcolare le radici terze di $f_w(z)$ per $w = (1+i)/3$ e $z = (-3+4i)/5$.
 - Dimostrare che per ogni numero complesso w tale che $w \notin S$, si ha che $f_w(S) = S$ dove $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

2. Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due successioni $\{a_n\}_{n \geq 0}$, $\{b_n\}_{n \geq 0}$ tali che

$$\forall n \geq 0, a_n < b_n, \bigcup_{n=0}^{\infty} (a_n, b_n) \supset \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad \forall N \geq 0, \sum_{n=0}^N (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

3. Determinare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^x - 2(\cos(\pi x))^2 - 3x + 2}{(\sqrt{x} - 1)^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}^+$.

4. Determinare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(f_n^{(m+2)}(x) - 2f_n^{(m+1)}(x) + f_n^{(m)}(x))}{f_n(x)}$$

dove $m, n \in \mathbb{N}^+$ e $f_n(x) = x^n e^x$.

5. Sia $f(x) = x^3 - x$.

- Esiste un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ tale che per P_0 non passa nessuna retta tangente al grafico di f ?
- Esiste un punto $P_3 \in \mathbb{R}^2$ tale che per P_3 passano tre rette distinte, ciascuna tangente al grafico di f ?