

**Analisi Matematica II - Complementi di Matematica - Quarto Appello (23-09-2011)**

Ogni esercizio vale 6 punti. Per ogni esercizio si deve presentare lo svolgimento su un foglio a parte e riportare nel riquadro, su questo foglio, solo il risultato finale.

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{|x|(1+xy)}{(x^2+y^2)^2} dx dy$$

dove  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, |y| \geq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$ .

**R:**  $\boxed{\iint = 5/4}$

2. Per  $a \in \mathbb{R}$ , calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} (2x + 3y^2) dx + axy dy$$

dove  $\gamma$  è la curva formata dall'unione del quarto di circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio 2 da  $(2, 0)$  a  $(0, 2)$  e del quarto di circonferenza di centro  $(2, 2)$  e raggio 2 da  $(0, 2)$  a  $(2, 0)$ . Per quale valore di  $a$  tale integrale è uguale a zero?

**R:**  $\boxed{\int_{\gamma} = (a - 6)(2\pi - 4), a = 6}$

3. Calcolare la parte principale dello sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2(1+z+z^2+z^3)}$$

in un intorno di  $z_0 = 0$ .

**R:**  $\boxed{\frac{1}{z^2} + \frac{\pi - 1}{z}}$

4. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{z^4 + 1}{z^4 - 4iz^3 - 4z^2} dz$$

dove  $\gamma$  è la circonferenza di centro  $1 + i$  e raggio  $R > 0$  percorsa in senso antiorario.

**R:**  $\boxed{\int = 0 \text{ per } 0 < R < \sqrt{2}, \int = -8\pi \text{ per } R > \sqrt{2},}$

5. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 4y(t) + 16e^{-5t} \\ y'(t) = 4x(t) - y(t) \\ x(0) = -1, y(0) = -1 \end{cases}$$

e calcolare  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)/x(t)$ .

**R:**  $\boxed{x(t) = (8t - 1)e^{-5t}, y(t) = -(8t + 1)e^{-5t}, \lim = -1}$