

Cognome: _____ Nome: _____

Analisi Matematica II - Complementi di Matematica - Terzo Appello (15-09-2011)

Ogni esercizio vale 6 punti. Per ogni esercizio si deve presentare lo svolgimento su un foglio a parte e riportare nel riquadro, su questo foglio, solo il risultato finale.

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D |x| dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2y, \sqrt{3}x + y \leq 2\}$.

R: $\boxed{\iint = 23/24}$

2. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} xy (dx + dy)$$

dove γ è la curva formata dall'unione della semicirconferenza di centro $(0, 2)$ e raggio 2 da $(0, 0)$ a $(0, 4)$ passante per $(2, 2)$ e i segmenti rettilinei da $(0, 4)$ a $(-2, 4)$ e da $(-2, 4)$ a $(0, 0)$.

R: $\boxed{\int_{\gamma} = 4\pi + 8}$

3. Calcolare la parte principale dello sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{16 \cos(\pi z^2)}{z(z^4 - 1)^2}$$

in un intorno di $z_0 = 1$.

R: $\boxed{-\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{4}{z-1}}$

4. Operando la sostituzione $z = \cos(t) + i \sin(t)$, trasformare l'integrale reale

$$\int_0^{2\pi} (\sin(3t))^2 (\cos(2t))^4 dt$$

in un integrale di variabile complessa e calcolarlo.

R: $\boxed{\int = 3\pi/8}$

5. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = 4x(t) - y(t) + 3e^{-2t} \\ x(0) = 0, y(0) = 3 \end{cases}$$

e calcolare $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)/x(t)$.

R: $\boxed{x(t) = e^t - e^{-2t}, y(t) = 2e^t + e^{-2t}, \lim = 2}$
