

Cognome: _____ Nome: _____

Analisi Matematica II - Complementi di Matematica - Primo Appello (08-07-2011)

Ogni esercizio vale 6 punti. Per ogni esercizio si deve presentare lo svolgimento su un foglio a parte e riportare nel riquadro, su questo foglio, solo il risultato finale.

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16 \leq x^2 + y^2 \leq 32, 2\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}y\}$.

R: $\boxed{\iint = 3 - 2 \log 2}$

2. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} (32xy + 16y) dx + (16x^2 + 32x) dy$$

dove γ è la curva formata dall'unione del quarto di circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1 da $(0, 0)$ a $(1, 1)$ e dell'arco della parabola $y = 2 - x^2$ da $(1, 1)$ a $(-1/2, 7/4)$.

R: $\boxed{\int_{\gamma} = 21 - 4\pi}$

3. Calcolare, dove è definito, l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 \sin(5\pi iz)}{(z^2 - iz + 6)^2} dz$$

se γ è la circonferenza di centro $1 + i$ e raggio $R > 0$ percorsa 5 volte in senso orario.

R: $\boxed{\int_{\gamma} = 0 \text{ se } R < \sqrt{5}, \int_{\gamma} = -18\pi^2 \text{ se } \sqrt{5} < R < \sqrt{10}, \int_{\gamma} = -10\pi^2 \text{ se } R > \sqrt{10}}$

4. Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^3 - i)(x^2 + 1)} dx.$$

R: $\boxed{\int = \pi/6}$

5. Risolvere, per ogni $a \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) = x'(t) + 2x(t) + 12e^{-2t} \\ x(0) = a, x'(0) = -6 \end{cases}$$

e calcolare $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$.

R: $\boxed{x(t) = (\frac{a}{3} - 1)(e^{2t} + 2e^{-t}) + 3e^{-2t}, \lim = 0 \text{ se } a = 3, \lim = +\infty \text{ se } a > 3, \lim = -\infty \text{ se } a < 3}$
