1

Numeri complessi

Nel corso dello studio della matematica si assiste ad una progressiva estensione del concetto di numero. Dall'insieme degli interi naturali $\mathbb{N}$ si passa a quello degli interi relativi $\mathbb{Z}$ per poi giungere ai razionali $\mathbb{Q}$ e ancora ai reali $\mathbb{R}$. Spesso questi ampliamenti vengono giustificati con l'incapacità di risolvere in un certo insieme un determinato problema. Ad esempio l'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzione nell'insieme dei razionali, mentre ne ha ben due nell'estensione $\mathbb{R}$, ossia $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. La necessità di ampliare ulteriormente i numeri reali si presenta invece quando si prova a risolvere un'altra equazione di secondo grado:

$$x^2 = -1.$$

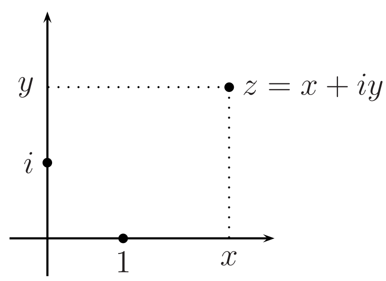
Il problema in questo caso è comune a tutte le risoluzioni di equazioni di secondo grado con discriminante negativo e consiste nel fatto che la funzione reale radice quadrata non è definita per numeri negativi. Come vedremo l'insieme dei numeri complessi, che denoteremo con il simbolo $\mathbb{C}$, permetterà di dare una risposta a questo problema.

1. La definizione di numero complesso e le sue rappresentazioni

L'estensione consiste nel passaggio dalla dimensione uno della retta (reale) alla dimensione due del piano (complesso). Un *numero complesso* z si identifica dunque come un punto nel piano e comunemente viene rappresentato in due modi: nella forma cartesiana e nella forma esponenziale.
Nella *forma cartesiana* il numero complesso z viene individuato dalle sue coordinate (reali) x e y e si può scrivere

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy$$

dove i particolari numeri complessi $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono stati identificati rispettivamente con l'*unità reale* 1 e l'*unità immaginaria* i.



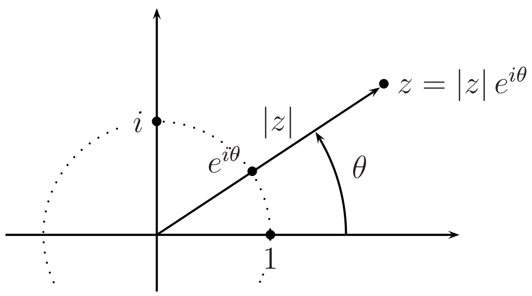
La coordinata x è la *parte reale* di z mentre y è la *parte immaginaria* di z:

$$x = \mathrm{Re}(z)\ , \quad y = \mathrm{Im}(z).$$

Nella *forma esponenziale* il numero complesso z viene invece individuato dal *modulo* $|z|$, ossia la distanza del punto z dall'origine, e dall'*argomento*, ossia l'angolo θ compreso tra la direzione positiva dell'asse delle x e la semiretta uscente dall'origine e passante per z. Tale angolo viene espresso in radianti e non è definito quando $z = 0$, mentre per $z \neq 0$ è determinato a meno di multipli di 2π (che corrisponde ad un angolo giro). In questo modo possiamo scrivere

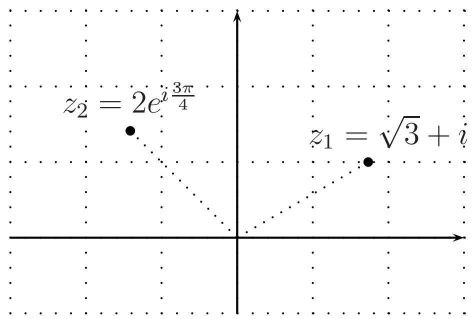
$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

dove il simbolo $e^{i\theta}$ è definito come il numero complesso di modulo unitario $\cos\theta + i\sin\theta$.



— ◇ —

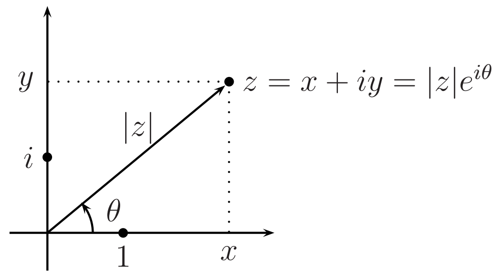
Esempio 1.1 Rappresentiamo nel piano il numero complesso $z_1 = \sqrt{3} + i$, scritto in forma cartesiana, e il numero complesso $z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$, scritto in forma esponenziale.



Si osservi che la forma esponenziale di z_2 non è unica:

$$z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\, e^{i(\frac{3\pi}{4}+2\pi)} = 2\, e^{i\frac{11\pi}{4}} = e^{i(\frac{3\pi}{4}-2\pi)} = 2\, e^{-i\frac{5\pi}{4}}.$$

La seguente figura ci aiuta a capire come passare da una forma all'altra



Il passaggio dalla forma cartesiana a quella esponenziale è complicato dall'indeterminazione dell'argomento:

Dalla forma cartesiana alla forma esponenziale

Se $z = x + iy \neq 0$ allora

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \theta = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{|z|}) & \text{se } y \geq 0 \\ -\arccos(\frac{x}{|z|}) & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

In questo modo viene calcolato solo uno degli infiniti argomenti associati a z e precisamente quello compreso nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. L'insieme completo dei possibili argomenti è dato da: $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Il passaggio inverso è più semplice:

Dalla forma esponenziale alla forma cartesiana

Se $z = |z|\, e^{i\theta}$ allora

$$x = \mathrm{Re}(z) = |z| \cos\theta \quad \text{e} \quad y = \mathrm{Im}(z) = |z| \sin\theta.$$

— ◇ —

Esempio 1.2 Proviamo a convertire i numeri complessi dell'esempio precedente.

(1) Per $z_1 = \sqrt{3} + i$

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{e} \quad \theta_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

quindi $z_1 = 2\, e^{i\frac{\pi}{6}}$.

(2) Per $z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$x_2 = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad y_2 = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

quindi $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

2. La somma

L'operazione di somma di due numeri complessi è piuttosto semplice: si tratta di scrivere gli addendi in forma cartesiana e di sommare separatamente le parti reali e le parti immaginarie.

Somma

Se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ allora

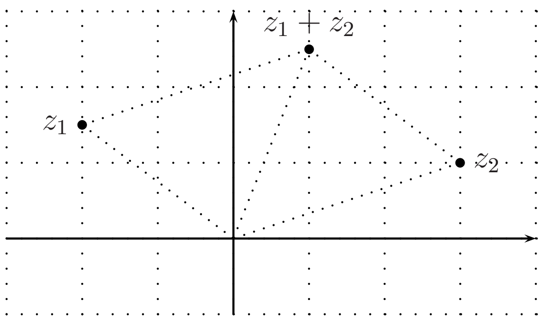
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

— ◇ —

Esempio 2.1. Se $z_1 = -2 + \frac{3}{2}i$ e $z_2 = 3 + i$ allora

$$z_1 + z_2 = \left(-2 + \frac{3}{2}i\right) + (3 + i) = (-2 + 3) + i\left(\frac{3}{2} + 1\right) = 1 + \frac{5}{2}i$$

Nel piano la somma si può individuare costruendo un parallelogramma di lati z_1 e z_2.



3. Il prodotto

La definizione dell'operazione di prodotto tra due numeri complessi è un po' più delicata: per moltiplicare $z_1 = x_1 + iy_1$ per $z_2 = x_2 + iy_2$ ci comportiamo come il prodotto di due binomi:

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2.$$

In questo modo la definizione di prodotto dipende dal risultato di $i \cdot i = i^2$. Dato che l'introduzione dei numeri complessi è motivata proprio dal desiderio di risolvere l'equazione $z^2 = -1$, "decidiamo" che il numero complesso i sia una delle soluzione cercate, ossia che $i^2 = -1$. Con questa scelta la definizione completa di prodotto diventa:

Prodotto in forma cartesiana

Se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ allora

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Proviamo a riprendere i numeri dell'esempio precedente e a farne il prodotto.

— ⋄ —

Esempio 3.1 Se $z_1 = -2 + \frac{3}{2}i$ e $z_2 = 3 + i$ allora

$$z_1 \cdot z_2 = \left(-2 \cdot 3 - 1 \cdot \frac{3}{2}\right) + i\left(-2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{2} + \frac{5}{2}i$$

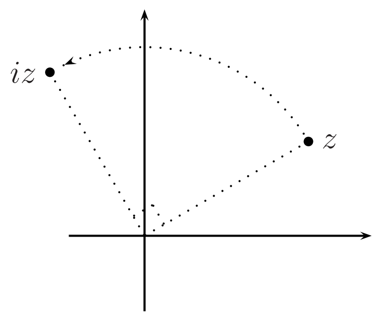
L'interpretazione geometrica del prodotto diventa più evidente se i fattori sono scritti in forma esponenziale:

Prodotto in forma esponenziale
Se $z_1 = \lvert z_1\rvert e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \lvert z_2\rvert e^{i\theta_2}$ allora $$z_1 \cdot z_2 = \lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Dunque nel prodotto di due numeri complessi i moduli si moltiplicano mentre gli argomenti si sommano (e questo giustifica la scelta del simbolo esponenziale). Verifichiamo questa proprietà ricordando ancora una volta che $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= |z_1||z_2|\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right) \\ &= |z_1||z_2|\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right) \\ &= |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Un caso particolare molto interessante è il prodotto di un numero complesso z per i. Per quanto detto, la moltiplicazione per $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ corrisponde a una rotazione di 90 gradi in senso antiorario.

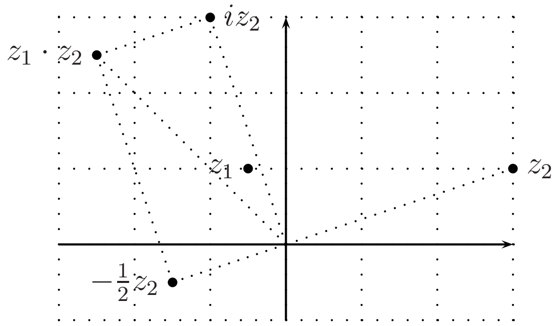


Proviamo a calcolare un altro prodotto descrivendo i passi dell'operazione nel piano complesso.

— ⋄ —

Esempio 3.2. Calcoliamo il prodotto di $z_1 = -\frac{1}{2} + i$ per $z_2 = 3 + i$:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\right) \cdot z_2 = -\frac{1}{2} z_2 + i z_2 = \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} i\right) + (3i - 1) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} i$$

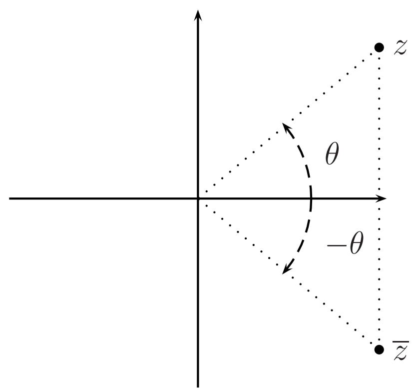


4. Il coniugato e il quoziente

Il *coniugato* $\overline{z}$ di un numero complesso $z = x + iy$ è definito nel modo seguente

$$\overline{z} = x - iy$$

e corrisponde al punto simmetrico di z rispetto all'asse reale. Quindi in forma esponenziale: se $z = |z| e^{i\theta}$ allora $\overline{z} = |z| e^{-i\theta}$



— ◇ —

Esempio 4.1 Determiniamo l'insieme dei numeri complessi z tali che

$$z^2 + \overline{z}^2 = 0.$$

Riscriviamo l'equazione ponendo $z = x + iy$

$$(x + iy)^2 + (x - iy)^2 = (x^2 + 2ixy - y^2) + (x^2 - 2ixy - y^2) = 2(x^2 - y^2) = 0.$$

Quindi le coordinate dei punti del piano complesso $\mathbb{C}$ richiesti sono tali che

$$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y) = 0$$

ossia le rette $y = -x$ e $y = x$.

— ◇ —

Notiamo che

$$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + ixy - ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Questa relazione permette di calcolare il quoziente di due numeri complessi riconducendolo ad un prodotto:

Quoziente
Se $z_2 \neq 0$ allora $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

— ◇ —

Esempio 4.2 Calcoliamo il quoziente di $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = 3 + i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(-1+i)\cdot(3-i)}{3^2+1^2} = \frac{(-1+i)\cdot(3-i)}{10} = -\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}.$$

Nel caso in cui i numeri siano in forma esponenziale, anche per il quoziente si ottiene una formula significativa: se $z_1 = |z_1|\, e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|\, e^{i\theta_2}$ allora

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|\, e^{i\theta_1} \cdot |z_2|\, e^{-i\theta_2}}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\, e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Dunque nel quoziente di due numeri complessi i moduli si dividono mentre gli argomenti si sottraggono.

— ◇ —

Esempio 4.3. Calcoliamo il quoziente di $z_1 = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_2 = 3\, e^{i\frac{\pi}{4}}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\, e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = \frac{2}{3}\, e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

5. Potenza di un numero complesso

Come abbiamo visto, la forma esponenziale risulta particolarmente comoda quando si devono effettuare prodotti o quozienti. Per esempio il calcolo del quadrato di un numero complesso $z = |z|e^{i\theta}$ si svolge nel seguente modo

$$z^2 = |z|\, e^{i\theta} \cdot |z|\, e^{i\theta} = |z|^2 e^{i(\theta+\theta)} = |z|^2 e^{i2\theta}.$$

Più in generale il calcolo della *potenza n-esima* con n intero positivo diventa

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}$$

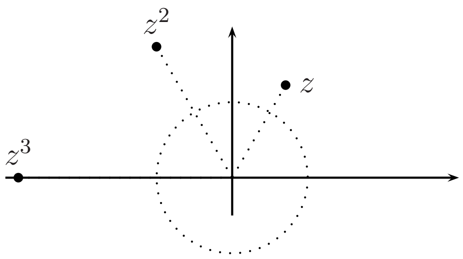
ossia bisogna elevare il modulo alla n e moltiplicare per n l'argomento (se $z = 0$ allora $z^n = 0$).

— ◇ —

Esempio 5.1 Calcoliamo le potenze di $z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ per $n = 1, 2, 3$:

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}\ , z^2 = 2\, e^{i\frac{2\pi}{3}},\ z^3 = 2\sqrt{2}\, e^{i\pi} = -2\sqrt{2}.$$

Questi punti sono riportati nella figura seguente evidenziando la loro posizione rispetto alla circonferenza unitaria.



Ora facciamo un altro esempio, questa volta partendo da un numero in forma cartesiana.

— ◇ —

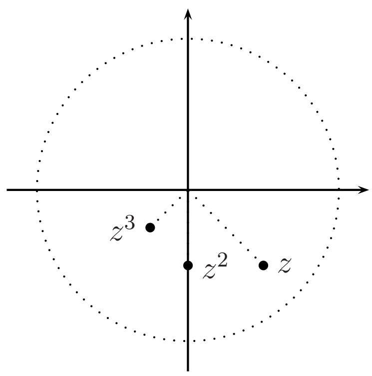
Esempio 5.2 Calcoliamo le potenze di $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ per $n = 1, 2, 3$. Per agevolare il calcolo riscriviamo il numero in forma esponenziale:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \theta = -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Quindi determiniamo le potenze richieste

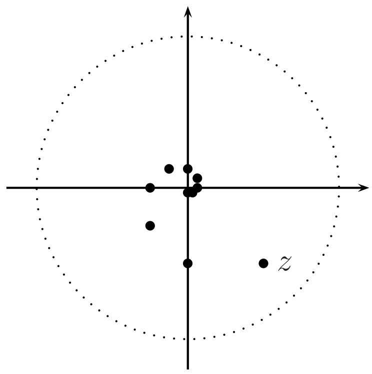
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\ , z^2 = \frac{1}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{2},\ z^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, e^{-3i\frac{\pi}{4}}.$$

Questi punti sono riportati nella figura seguente evidenziando la loro posizione rispetto alla circonferenza unitaria.



— ◇ —

Da questi esempi si può osservare che, facendo le successive potenze di un numero complesso z, i punti corrispondenti "girano" attorno all'origine. Se inoltre $|z| > 1$ allora i punti si allontanano indefinitamente ($|z|^n \to +\infty$), se $|z| = 1$ i punti rimangono sulla circonferenza unitaria ($|z|^n = 1$) e infine se $|z| < 1$ i punti si avvicinano all'origine ($|z|^n \to 0$). Se riprendiamo il punto z dell'esempio precedente e proviamo a disegnare nel piano le prime 10 potenze otteniamo:



6. Radici di un numero complesso

Passiamo ora all'analisi del problema inverso: se conosciamo la potenza n-esima di un numero complesso, come facciamo a calcolare il numero originale? Ossia dato un numero complesso z quante e quali sono le soluzioni w dell'equazione $w^n = z$? Se $z = 0$ la risposta è banale: l'unica soluzione possibile è proprio $w = 0$. Supponiamo quindi che $z \neq 0$ e iniziamo a ragionare nel caso particolare in cui $z = 1$.

Se $n = 2$ l'equazione da risolvere è $w^2 = 1$. Se esprimiamo l'incognita in forma esponenziale otteniamo: $w = |w|\, e^{i\varphi}$ e

$$w^2 = |w|^2 e^{i2\varphi} = 1\, e^{i0} = 1.$$

Dato che due numeri complessi in forma esponenziale sono uguali se e solo se i loro moduli sono uguali e i loro argomenti differiscono di un multiplo di 2π, abbiamo che

$$|w|^2 = 1 \quad \text{e} \quad 2\varphi = 0 + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Questo vuol dire che $|w| = 1$ (il modulo è un numero reale non negativo) e i possibili argomenti di w sono

$$\varphi = \frac{0 + 2k\pi}{2} = k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi l'insieme delle soluzioni si scrive come

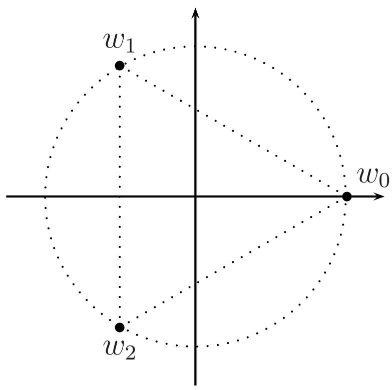
$$\left\{ w_k = e^{ik\pi} \,:\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Apparentemente questo insieme contiene infiniti elementi che dipendono dal parametro $k \in \mathbb{Z}$. Se però esaminiamo gli elementi con più attenzione ci accorgiamo che

$$e^{ik\pi} = 1 \;\text{ se } k \text{ è pari} \quad \text{e} \quad e^{ik\pi} = -1 \;\text{ se } k \text{ è dispari}$$

ossia
$$\left\{w_k = e^{ik\pi} \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{w_k = e^{ik\pi} \,:\, k = 0,1\right\} = \{1,-1\}\,.$$
Così le soluzioni sono esattamente 2 e sono quelle che potevamo determinare già nell'ambito dei numeri reali: $w_0 = 1$ e $w_1 = -1$.

Proviamo ora a vedere cosa succede per $n = 3$. L'equazione da risolvere è $w^3 = 1$ e se ripercorriamo i passaggi del caso precedente otteniamo:
$$w^3 = |w|^3 e^{i3\varphi} = 1,$$
che equivale a
$$|w| = 1 \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$
e l'insieme delle soluzioni, dopo le analoghe riduzioni del caso $n = 2$, si scrive come
$$\left\{w_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{w_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \,:\, k = 0,1,2\right\} = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}.$$
Dunque le soluzioni sono esattamente 3: oltre a quella che ci aspettavamo dal caso reale, $w_0 = 1$, abbiamo ottenuto anche $w_1 = e^{i2\frac{\pi}{3}}$ e $w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Riportando i punti nel piano possiamo notare che queste soluzioni stanno tutte sulla circonferenza unitaria e individuano i vertici di un triangolo equilatero.

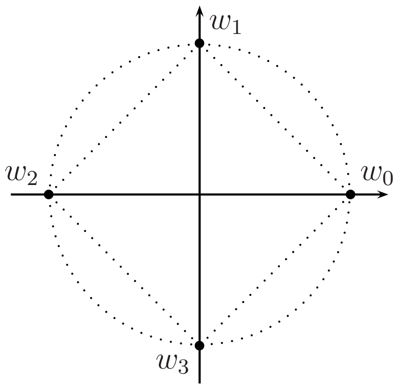


Ora dovrebbe essere chiaro cosa si ottiene per $z = 1$ quando n è un intero positivo qualunque: le soluzioni dell'equazione
$$w^n = 1$$
sono n e precisamente
$$\left\{w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \,:\, k = 0,1,2,3,\ldots,n-1\right\} = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right\}.$$
Nel piano questi numeri, dette *radici n-esime dell'unità*, sono disposti ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza unitaria e con un vertice in 1.

— ⋄ —

Esempio 6.1 Calcoliamo le radici quarte dell'unità. Risolvendo l'equazione $w^4 = 1$ otteniamo

$$\left\{w_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}} \;:\; k = 0,1,2,3\right\} = \left\{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\} = \{1, i, -1, -i\}\,.$$



— ◇ —

Il caso più generale, quando z è un generico numero complesso diverso da zero, si affronta nello stesso modo e la conclusione è la seguente:

> Radici n-esime
>
> Se $z = |z|e^{i\theta} \neq 0$ allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione $w^n = z$ è costituito da n numeri distinti dette *radici n-esime di z*:
>
> $$\left\{w_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \;:\; k = 0,1,2,\ldots,n-1\right\}.$$

Nel piano i punti corrispondenti a ogni w_k sono disposti ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z|}$ centrata in 0 e con un vertice in $e^{i\frac{\theta}{n}}$.

— ◇ —

Esempio 6.2 Risolviamo l'equazione $w^2 = -1$. Si tratta di determinare le due radici quadrate del numero $z = -1 = e^{i\pi}$:

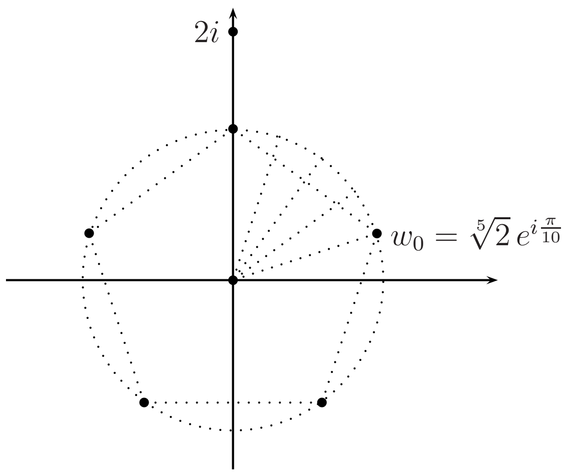
$$\left\{w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} \;:\; k = 0,1\right\} = \{i, -i\}\,.$$

In questo caso, il poligono regolare è costituito dai due punti opposti i e $-i$.

— ◇ —

Esempio 6.3 Calcoliamo le radici quinte di $z = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$:

$$\left\{ w_k = \sqrt[5]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)} \,:\, k = 0,1,2,3,4 \right\}.$$



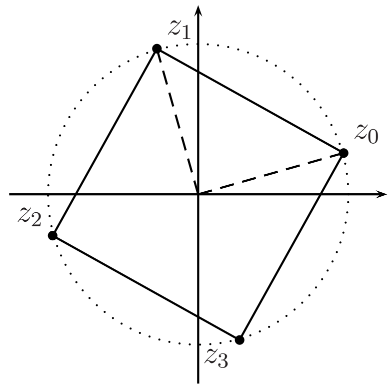
Quindi otteniamo un pentagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[5]{2}$ centrata in 0. L'argomento del vertice w_0 è $\frac{\pi}{10}$ ossia $\frac{1}{5}$ dell'argomento di $2i$ che è uguale a $\frac{\pi}{2}$.

— ◇ —

Esempio 6.4 Calcoliamo l'area del poligono di vertici

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, z^4 = 4\sqrt{5}(1+2i) \right\}.$$

I vertici sono le radici quarte del numero $4\sqrt{5}(1+2i)$ e quindi, per quanto detto, individuano un quadrato centrato nell'origine.



Per calcolare l'area di questo quadrato è necessario sapere solo il raggio r della circonferenza circoscritta ovvero il modulo delle radici:

$$r = (4\sqrt{5}|1+2i|)^{1/4} = (4\sqrt{5}\sqrt{1^2+2^2})^{1/4} = (20)^{1/4}.$$

Quindi sapendo che il lato del quadrato è $\sqrt{2}r$, l'area è uguale a

$$(\sqrt{2}r)^2 = 2r^2 = 2(20)^{1/2} = 4\sqrt{5}.$$

— ⋄ —

Esempio 6.5 Calcoliamo il limite $\lim_{n\to\infty} p_n$, dove p_n è il perimetro del poligono di vertici

$$\left\{z \in \mathbb{C} \;:\; z^{2n} = 4^n\right\}.$$

L'equazione $z^{2n} = 4^n = 2^{2n}$ individua i vertici di un poligono regolare di $2n$ lati inscritto nella circonferenza centrata in 0 e di raggio 2. Al crescere di n, il numero di lati aumenta e e la successione di poligoni *tende* alla circonferenza in cui sono iscritto. Quindi il limite della successione dei loro perimetri è la lunghezza di tale circonferenza ossia 4π.

7. Equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$

In quest'ultima parte vogliamo discutere la risoluzione di una generica equazione di secondo grado

$$az^2 + bz + c = 0.$$

quando i coefficienti $a, b, c \in \mathbb{C}$ ($a \neq 0$). Si può verificare che la formula per determinare le soluzioni nel caso reale è ancora valida nel caso complesso

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

dove il simbolo $\pm\sqrt{\Delta}$ rappresenta le due radici quadrate del numero complesso $\Delta = b^2 - 4ac$. Quindi, a differenza del caso reale, un'equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$ ammette sempre due soluzioni (eventualmente coincidenti).

— ⋄ —

Esempio 7.1 Risolviamo l'equazione $z^2 - 4z + 4 - \frac{1}{2}i = 0$: in questo caso

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4 - \frac{1}{2}i) = 2i.$$

Le due radici quadrate di $2i$ sono

$$w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i \quad \text{e} \quad w_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1 - i = -w_1.$$

Quindi

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{4 + 1 + i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-b - w_1}{2a} = \frac{4 - 1 - i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Provate a ottenere lo stesso risultato dopo aver osservato che l'equazione data può essere riscritta nel seguente modo:

$$(z - 2)^2 = \frac{1}{2}i.$$

— ⋄ —

La situazione descritta per un'equazione polinomiale di grado 2 si generalizza al caso di un'equazione polinomiale di grado n:

Teorema fondamentale dell'algebra
Sia $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ un polinomio di grado $n > 0$ a coefficienti in $\mathbb{C}$. Allora l'equazione $P(z) = 0$ ha n soluzioni complesse $z_1, z_2, \cdots, z_n$ (tenendo conto delle molteplicità) e inoltre

$$P(z) = a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

— ⋄ —

Esempio 7.2 Risolviamo l'equazione

$$P(z) = z^4 + (1 - 2i)z^2 - 2i = 0$$

e poi fattorizziamo il polinomio $P(z)$.
Poniamo $w = z^2$:

$$w^2 + (1 - 2i)w - 2i = 0.$$

In questo caso $\Delta = (1-2i)^2 + 8i = -3 + 4i = 5e^{i\theta}$. Possiamo determinare le due radici quadrate di Δ senza determinare $\theta \in [0, 2\pi)$, ricordando le formule di bisezione:

$$\cos(\theta/2) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}, \quad \sin(\theta/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$$

dove il segno è positivo se $\theta \in [0, \pi]$ ovvero se $\sin\theta \geq 0$. Nel nostro caso $\cos\theta = -3/5$ e $\sin\theta = 4/5$, così

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{5}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin(\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{5}\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

e

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{5}e^{i\theta/2} = \pm\sqrt{5}(\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)) = \pm(1 + 2i).$$

Dunque le soluzioni sono $w_1 = -1$ e $w_2 = 2i$ e

$$w^2 + (1 - 2i)w - 2i = (w - (-1)) \cdot (w - 2i) = (z^2 + 1) \cdot (z^2 - 2i) = 0.$$

Ora basta risolvere le equazioni che si ottengono uguagliando a zero i singoli fattori:

$$z^2 = -1 \quad \text{e} \quad z^2 = 2i.$$

Quindi le 4 soluzioni dell'equazione data sono:

$$z_1 = i, \;\; z_2 = -i \quad \text{e} \quad z_3 = 1 + i, \;\; z_4 = -1 - i$$

Inoltre, il polinomio dato può essere fattorizzato nel seguente modo

$$P(z) = z^4 + (1 - 2i)z^2 - 2i = (z - i) \cdot (z + i) \cdot (z - 1 - i) \cdot (z + 1 + i).$$

— ◇ —

Esempio 7.3 Determiniamo il numero di elementi dell'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$P(z) = (z^4 - 1)^2 \cdot (z^3 - 1) = 0.$$

Il polinomio $P(z)$ ha grado $4 \cdot 2 + 3 = 11$ quindi per il teorema fondamentale dell'algebra ci aspettiamo 11 soluzioni (non necessariamente distinte). Nell'insieme delle soluzioni gli elementi multipli contano però una sola volta e quindi la domanda equivale a determinare il numero di soluzioni distinte.
Il fattore $(z^4 - 1)^2$ ha quattro zeri distinti ciascuno con molteplicità 2:

$$1\,, \quad i\,, \quad -1\,, \quad -i.$$

Il fattore $(z^3 - 1)$ ha tre zeri distinti ciascuno con molteplicità 1:

$$1\,, \quad (-1 + i\sqrt{3})/2\,, (-1 - i\sqrt{3})/2.$$

Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione $P(z) = 0$ è:

$$\left\{1, i, -1, -i, (-1 + i\sqrt{3})/2, (-1 - i\sqrt{3})/2\right\}$$

e il numero dei suoi elementi è 6.

— ◇ —

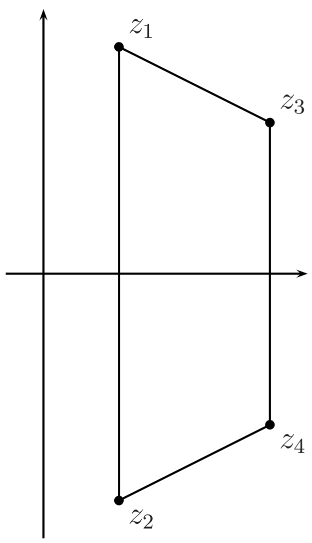
Esempio 7.4 Determiniamo il perimetro e l'area del poligono i cui vertici soddisfano l'equazione

$$P(z) = (z^2 - 2z + 10) \cdot (z^2 - 6z + 13) = 0.$$

Le soluzioni del polinomio di quarto grado $P(z)$ sono ottenute risolvendo i due fattori di secondo grado:

$$z_1 = 1 + 3i\,, z_2 = 1 - 3i \quad \text{e} \quad z_3 = 3 + 2i\,, z_4 = 3 - 2i.$$

Le due coppie di numeri complessi coniugati individuano i vertici di un trapezio:



Calcoliamo le lunghezze dei lati

$$|z_1 - z_2| = |6i| = 6,\ |z_1 - z_3| = |z_2 - z_4| = |-2 + i| = \sqrt{5}\ , |z_3 - z_4| = |4i| = 4$$

quindi il perimetro è $10 + 2\sqrt{5}$. L'area invece è uguale a

$$\frac{1}{2}\left(|z_1 - z_2| + |z_3 - z_4|\right) \cdot |\mathrm{Re}(z_3 - z_1)| = \frac{1}{2}\,(6 + 4) \cdot |3 - 1| = 10.$$

Esercizi

1. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = i + \frac{3}{2-i}.$$

2. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{1+2i}{-3+i}.$$

3. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = (1+2i)^4 - (1-2i)^4.$$

4. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}.$$

5. Sia $z = i$. Calcolare

$$z^7 \quad \text{e} \quad z^{2002}.$$

6. Sia $z = 1+i$. Calcolare

$$(z^{2005} + \overline{z}^{2005})/2^{1002}.$$

7. Sia $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calcolare

$$z^{8!-1}.$$

8. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z + \overline{z} = 0.$$

9. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^2(\overline{z}+2) = 2z(z+1).$$

10. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^4 + |z|^4 = 0.$$

11. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$|\overline{z} - 2| = |\mathrm{Re}(z+2)|.$$

12. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^2 + \overline{z}^2 = 0.$$

13. Determinare il minimo dell'insieme

$$\left\{|z| \,:\, (z+2+2i)^2=-1\right\}.$$

14. Determinare il massimo dell'insieme

$$\left\{\mathrm{Re}(w) \,:\, w^3=8i\right\}.$$

15. Risolvere l'equazione

$$z^2-2iz+3=0.$$

16. Risolvere l'equazione

$$z^2-3z+3+i=0.$$

17. Risolvere l'equazione

$$(z^2+i)^2+1=0.$$

18. Risolvere l'equazione

$$||z|-2i|^2=4.$$

19. Risolvere l'equazione

$$|z|^2=12-|z|.$$

20. Risolvere l'equazione

$$\mathrm{Im}(z^2)=|z|^2.$$

21. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione

$$\overline{z}^9=z^3|z|^5.$$

22. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$(z^4-1)/(z^3+1)^2=0.$$

23. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$z(\overline{z}+2|z|)+4=2|z|(z+1).$$

24. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme

$$\left\{|z-w| \,:\, z^4=1 \text{ e } w^4=-4\right\}.$$

25. Risolvere la disuguaglianza

$$\mathrm{Re}\left((z-1)(z-2i)\right)\geq \mathrm{Re}(z-1)\cdot\mathrm{Re}(z-2i).$$

26. Risolvere la disuguaglianza

$$|z-2i|^2-8>|z|^2-|z+2i|^2$$

27. Determinare l'estremo superiore e inferiore dell'insieme

$$\{|z-w| \,:\, |z-2| \leq 1 \text{ e } \mathrm{Re}(w - i\overline{w}) = 0\}\,.$$

28. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme

$$\{|z-w| \,:\, |z+2-3i| \leq 3 \text{ e } |w-4-4i| \leq 4\}\,.$$

29. Calcolare il perimetro del poligono di vertici

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^6 = 1/(3-2i)^6\right\}.$$

30. Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha che

$$|\mathrm{Re}((z+1)(z-3))| \geq |z+1||z-3|.$$

31. Rappresentare nel piano complesso $\mathbb{C}$ l'insieme

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,:\, (1+i)z = \sqrt{2}|z|\right\}$$

32. Quanti sono i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} z^{10} = 3+8i \\ z^5 = 8-3i \end{cases}.$$

Soluzioni

1. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = i + \frac{3}{2-i}.$$

R.

$$\begin{aligned} z &= i + \frac{3 \cdot \overline{2-i}}{|2-i|^2} = i + \frac{3 \cdot (2+i)}{4+1} = i + \frac{6}{5} + \frac{3}{5}i \\ &= \frac{6}{5} + \left(1 + \frac{3}{5}\right) i = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i. \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Re}(z) = 6/5$ e $\mathrm{Im}(z) = 8/5$.

— ⋄ —

2. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{1+2i}{-3+i}.$$

R.

$$z = \frac{1+2i}{-3+i} = \frac{(1+2i) \cdot (\overline{-3+i})}{|-3+i|^2} = \frac{(1+2i) \cdot (-3-i)}{10} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i.$$

Quindi $\mathrm{Re}(z) = -1/10$ e $\mathrm{Im}(z) = -7/10$.

— ⋄ —

3. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = (1+2i)^4 - (1-2i)^4.$$

R. Sia $w = (1+2i)^4$ allora $z = w - \overline{w} = 2i\mathrm{Im}(w)$ e

$$\begin{aligned} z &= 2i\mathrm{Im}((1+2i)^4) = 2i\mathrm{Im}(1 + 4(2i) + 6(2i)^2 + 4(2i)^3 + (2i)^4) \\ &= 2i\mathrm{Im}(4(2i) + 4(2i)^3) = 2i(8 + 32(-1)) = -48i. \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = -48$.

— ⋄ —

4. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}.$$

R. Conviene scrivere i numeri $1+i$ e $1-i$ in forma esponenziale:

$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{e} \quad 1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Quindi

$$z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8} = \frac{(\sqrt{2})^{10}\, e^{i\frac{10\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^8\, e^{-i\frac{8\pi}{4}}} = (\sqrt{2})^2\, e^{i\frac{(10+8)\pi}{4}} = 2\, e^{i\frac{9\pi}{2}} = 2\, e^{i(4+\frac{1}{2})\pi} = 2i.$$

— ◇ —

5. Sia $z = i$. Calcolare

$$z^7 \quad \text{e} \quad z^{2002}.$$

R. Sapendo che $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$ allora

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1.$$

Quindi per calcolare le potenze richieste basta considerare solo il resto della divisione dell'esponente per 4:

$$z^7 = i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = i^3 = -i;$$
$$z^{2002} = i^{2002} = i^{4\cdot 500+2} = i^{4\cdot 500} \cdot i^2 = i^2 = -1.$$

— ◇ —

6. Sia $z = 1+i$. Calcolare

$$(z^{2005} + \overline{z}^{2005})/2^{1002}.$$

R. Scriviamo z in forma esponenziale

$$z = 1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

e poi calcoliamo z^{2005} (notando che $e^{i501\pi} = -1$)

$$z^{2005} = 2^{2005/2}e^{i2005\pi/4} = 2^{1002}\sqrt{2}e^{i(501+1/4)\pi} = 2^{1002}\sqrt{2}e^{i501\pi}e^{i\pi/4} = -2^{1002}z.$$

Infine dato che $\overline{z}^{2005} = \overline{z^{2005}} = -2^{1002}\overline{z}$

$$(z^{2005} + \overline{z}^{2005})/2^{1002} = (-2^{1002}z - 2^{1002}\overline{z})/2^{1002} = -(z+\overline{z}) = -2\mathrm{Re}(z) = -2.$$

— ◇ —

7. Sia $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calcolare
$$z^{8!-1}.$$

R. Scriviamo prima z in forma esponenziale:
$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \quad \text{e} \quad \theta = -\arccos(\frac{x}{|z|}) = -\arccos(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{3}.$$
Dunque $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ e quindi $z^6 = e^{-i\frac{6\pi}{3}} = 1$. Dato che $8!$ è un multiplo di 6 $z^{8!} = 1$ e
$$z^{8!-1} = z^{8!} \cdot z^{-1} = z^{-1} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

— ◇ —

8. Determinare l'insieme dei numeri z tali che
$$z + \overline{z} = 0.$$

R. Riscriviamo l'equazione ponendo $z = x + iy$
$$(x+iy) + (x-iy) = 2x = 0$$
Quindi i punti del piano complesso richiesti sono quelli della retta $x = 0$.

— ◇ —

9. Determinare l'insieme dei numeri z tali che
$$z^2(\overline{z}+2) = 2z(z+1).$$

R. Dato che $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ allora
$$z^2(\overline{z}+2) - 2z(z+1) = z|z|^2 + 2z^2 - 2z^2 - 2z = z(|z|^2 - 2) = 0.$$
Quindi i punti del piano complesso richiesti sono tali che
$$z = 0 \quad \text{oppure} \quad |z|^2 = 2$$
ossia il punto $z = 0$ e la circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt{2}$.

— ◇ —

10. Determinare l'insieme dei numeri z tali che
$$z^4 + |z|^4 = 0.$$

R. Dato che $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ allora
$$z^4 + |z|^4 = z^4 + z^2\,\overline{z}^2 = z^2(z^2 + \overline{z}^2) = 0$$
Quindi i punti del piano complesso richiesti sono tali che
$$z^2 = 0 \quad \text{oppure} \quad z^2 + \overline{z}^2 = 0$$
ossia il punto $z = 0$ e le rette $y = -x$ e $y = x$. Dato che il punto 0 appartiene alle due rette nel descrivere l'insieme ottenuto possiamo semplicemente dire che è costituito dalle due rette $y = -x$ e $y = x$.

— ◇ —

11. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$|\overline{z} - 2| = |\mathrm{Re}(z + 2)|.$$

R. Posto $z = x + iy$ ed elevando al quadrato otteniamo l'equazione equivalente

$$|(x - 2) - iy|^2 = |x + 2|^2$$

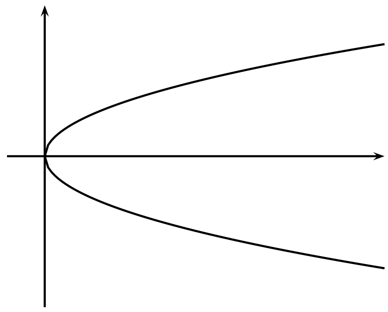
ossia

$$(x - 2)^2 + (-y)^2 = (x + 2)^2.$$

Svolgendo e semplificando troviamo che le coordinate dei punti dell'insieme cercato soddisfano l'equazione

$$y^2 = 8x$$

che rappresenta la seguente parabola



— ◇ —

12. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^2 + \overline{z}^2 = 0.$$

R. Riscriviamo l'equazione ponendo $z = x + iy$

$$(x + iy)^2 + (x - iy)^2 = (x^2 + 2ixy - y^2) + (x^2 - 2ixy - y^2) = 2(x^2 - y^2) = 0.$$

Quindi le coordinate dei punti del piano complesso richiesti sono tali che

$$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y) = 0$$

ossia le rette $y = -x$ e $y = x$.

— ◇ —

13. Determinare il minimo dell'insieme

$$\left\{|z| \,:\, (z+2+2i)^2 = -1\right\}.$$

R. Troviamo intantо le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$(z+2+2i)^2 + 1 = 0$$

Ricordando che $z^2+1=(z+i)(z-i)$ allora

$$(z+2+2i)^2+1 = ((z+2+2i)+i)\,((z+2+2i)-i) = (z+2+3i)(z+2+i)$$

Dunque le radici di questo polinomio sono

$$z_1 = -(2+3i) = -2-3i \quad \text{e} \quad z_2 = -(2+i) = -2-i.$$

Ora calcoliamo i moduli ovvero gli elementi dell'insieme dato:

$$|z_1| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{13} \quad \text{e} \quad |z_2| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Quindi il minimo richiesto è $\sqrt{5}$.

— ◇ —

14. Determinare il massimo dell'insieme

$$\left\{\mathrm{Re}(w) \,:\, w^3 = 8i\right\}.$$

R. Troviamo intanto le radici terze di $8i = 8\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{aligned} w_0 &= 2\,e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\,(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i) = \sqrt{3}+i,\\ w_1 &= 2\,e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3}+i,\\ w_2 &= 2\,e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = 2\,e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i. \end{aligned}$$

Quindi

$$\max\left\{\mathrm{Re}(w) \,:\, w^3 = 8i\right\} = \max\left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0\right\} = \sqrt{3}.$$

— ◇ —

15. Risolvere l'equazione

$$z^2 - 2iz + 3 = 0.$$

R. Cominciamo con il calcolo di Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2i)^2 - 4(3) = -16.$$

Le due radici quadrate di $\Delta = -16 = 16\,e^{i\pi}$ sono

$$w_1 = 4\,e^{i\frac{\pi}{2}} = 4i \quad \text{e} \quad w_2 = 4\,e^{i\frac{3\pi}{2}} = -w_1.$$

Quindi

$$z_1 = \frac{-b+w_1}{2a} = \frac{2i+4i}{2} = 3i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-b-w_1}{2a} = \frac{2i-4i}{2} = -i.$$

— ◇ —

16. Risolvere l'equazione
$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

R. Calcolo di Δ:
$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(3+i) = -3 - 4i = 5\, e^{i\theta}.$$
Così $\cos\theta = -3/5$, $\sin\theta = -4/5$ e
$$\cos(\theta/2) = -\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{5})} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin(\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{3}{5})} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$
Quindi le due radici quadrate di $\Delta = -3 - 4i =$ sono
$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{5}e^{i\theta/2} = \pm\sqrt{5}(\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)) = \pm(-1+2i),$$
e possiamo determinare le soluzioni:
$$z_1 = (3 + (-1+2i))/2 = 1 + i \quad \text{e} \quad z_2 = (3 - (-1+2i))/2 = 2 - i.$$

— ◇ —

17. Risolvere l'equazione
$$(z^2 + i)^2 + 1 = 0.$$

R. Il primo membro è un polinomio di quarto grado in $\mathbb{C}$ e dunque ci aspettiamo quattro soluzioni (tenendo conto della molteplicità). Poniamo $w = z^2 + i$ e intanto risolviamo l'equazione $w^2 = -1$. Questa ha due soluzioni $w_1 = i$ e $w_2 = -i$ e quindi l'equazione proposta è equivalente a trovare le soluzioni delle due equazioni
$$z^2 + i = w_1 = i, \quad z^2 + i = w_2 = -i.$$
La prima equivale a $z^2 = 0$ e quindi le soluzioni sono $z_1 = z_2 = 0$ (la soluzione 0 ha molteplicità 2). La seconda invece equivale a
$$z^2 = -2i = 2\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
e dunque otteniamo
$$z_3 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i \quad z_4 = -z_3 = -1 + i.$$

— ◇ —

18. Risolvere l'equazione
$$||z| - 2i|^2 = 4.$$

R. Abbiamo che
$$||z| - 2i|^2 = (\mathrm{Re}(|z| - 2i))^2 + (\mathrm{Im}(|z| - 2i))^2 = |z|^2 + (-2)^2 = |z|^2 + 4 = 4.$$
ossia $|z|^2 = 0$ che è risolta solo per $z = 0$.

— ⋄ —

19. Risolvere l'equazione
$$|z|^2 = 12 - |z|.$$

R. Si tratta di un'equazione di secondo grado nella variabile $\rho = |z|$:
$$\rho^2 + \rho - 12 = 0.$$
che ha come soluzioni $\rho_1 = 3$ e $\rho_2 = -4$. Dato che $|z| \geq 0$, possiamo accettare solo la soluzione $\rho_1 = 3$. Quindi l'equazione iniziale è risolta da tutti i punti z tali che $|z| = 3$ ossia la circonferenza centrata in 0 di raggio 3.

— ⋄ —

20. Risolvere l'equazione
$$\mathrm{Im}(z^2) = |z|^2.$$

R. Ponendo $z = x + iy$ si ottiene
$$\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}((x+iy)^2) = \mathrm{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2xy \quad \text{e } |z|^2 = x^2 + y^2.$$
Quindi l'equazione iniziale è equivalente a $2xy = x^2 + y^2$ ossia $(x-y)^2 = 0$ ed è dunque risolta da tutti i punti sulla bisettrice $y = x$.

— ⋄ —

21. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione
$$\overline{z}^9 = z^3|z|^5.$$

R. Se calcoliamo il valore assoluto di entrambi i membri otteniamo
$$|\overline{z}|^9 = |z|^9 = |z^3|z|^5| = |z|^8,$$
ossia
$$|z|^9 - |z|^8 = |z|^8(|z| - 1) = 0.$$
e quindi $|z| = 0$ oppure $|z| = 1$. Se $|z| = 0$ allora otteniamo una prima soluzione: $z = 0$. Se invece $|z| = 1$ allora $\overline{z}^9 = z^{-9}$ e l'equazione iniziale diventa $z^{-9} = z^3$ ossia $z^{12} = 1$ che ha 12 soluzioni. Dunque in totale le soluzioni sono 13.

— ⋄ —

22. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$(z^4 - 1)/(z^3 + 1)^2 = 0.$$

R. Il numeratore $(z^4 - 1)$ ha quattro zeri distinti (ciascuno con molteplicità 1):

$$1\,, \quad i\,, \quad -1\,, \quad -i.$$

Il denominatore $(z^3 + 1)^2$ ha tre zeri distinti (ciascuno con molteplicità 2):

$$-1\,, \quad (1 + i\sqrt{3})/2\,, \quad (1 - i\sqrt{3})/2.$$

Il rapporto è uguale a zero se e solo se il numeratore si annulla e il denominatore è diverso da zero (altrimenti il rapporto non è definito!). Quindi l'insieme richiesto ha 3 elementi (gli elementi multipli contano una sola volta): $\{1, i, -i\}$.

— ◇ —

23. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$z(\overline{z} + 2|z|) + 4 = 2|z|(z + 1).$$

R. Svolgendo si ottiene

$$|z|^2 + 2z|z| + 4 = 2|z|z + 2|z|$$

ossia

$$|z|^2 - 2|z| + 4 = 0.$$

Se si risolve rispetto a $|z|$ si ottiene che

$$|z| = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{oppure} \quad |z| = 1 - i\sqrt{3}$$

e nessuna delle due equazioni ammette soluzioni perché $|z|$ deve essere un numero reale maggiore o uguale a 0. Quindi il numero di soluzioni dell'equazione data è 0.

— ◇ —

24. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme

$$\left\{|z - w| \,:\, z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\right\}.$$

R. L'equazione $z^4 = 1$ individua un primo quadrato di vertici:

$$z_0 = 1,\ z_1 = i,\ z_2 = -1,\ z_3 = -i.$$

L'equazione $w^4 = -4$ individua un secondo quadrato di vertici:

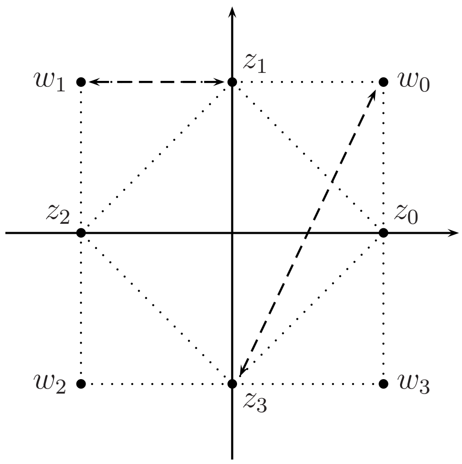
$$w_0 = 1 + i,\ w_1 = -1 + i,\ w_2 = -1 - i,\ w_3 = 1 - i.$$

L'insieme dato è dunque costituito dalla misure delle distanze tra z_j e w_k con $j, k = 1, 2, 3, 4$. Dal disegno possiamo facilmente vedere che la distanza massima è ottenuta per esempio tra z_3 e w_0:

$$\max\left\{|z-w| \,:\, z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\right\} = |z_3 - w_0| = |-i-(1+i)| = |-1-2i| = \sqrt{5}.$$

La distanza minima è ottenuta invece per esempio tra z_1 e w_1:

$$\min\left\{|z-w| \,:\, z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\right\} = |z_1 - w_1| = |i-(-1+i)| = 1.$$



— ◇ —

25. Risolvere la disuguaglianza

$$\mathrm{Re}\left((z-1)(z-2i)\right) \geq \mathrm{Re}(z-1) \cdot \mathrm{Re}(z-2i).$$

R. Poniamo $z = x + iy$ e svolgiamo i calcoli

$$\mathrm{Re}\left((z-1)(z-2i)\right) = \mathrm{Re}\left(z^2 - z - 2iz + 2i\right) = x^2 - y^2 - x + 2y$$

e

$$\mathrm{Re}(z-1) \cdot \mathrm{Re}(z-2i) = (x-1) \cdot x = x^2 - x.$$

Quindi la disuguaglianza iniziale è equivalente a

$$x^2 - y^2 - x + 2y \geq x^2 - x$$

ossia

$$-y^2 + 2y = y(2-y) \geq 0$$

e dunque $y \in [0, 2]$ e x può assumere qualunque valore. Così l'insieme dei numeri complessi che risolve la disuguaglianza sono quelli contenuti nella striscia $\mathbb{R} \times [0, 2]$.

— ◇ —

26. Risolvere la disuguaglianza

$$|z - 2i|^2 - 8 > |z|^2 - |z + 2i|^2$$

R. Poniamo $z = x + iy$ e svolgiamo i calcoli

$$|z - 2i|^2 - 8 = |x + i(y - 2)|^2 - 8 = x^2 + (y - 2)^2 - 8 = x^2 + y^2 - 4y - 4$$

e

$$|z|^2 - |z + 2i|^2 = |x + iy|^2 - |x + i(y + 2)|^2 = x^2 + y^2 - x^2 - (y + 2)^2 = -4y - 4$$

Quindi la disuguaglianza iniziale diventa

$$x^2 + y^2 - 4y - 4 > -4y - 4$$

ossia $x^2 + y^2 > 0$ e dunque l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

— ◇ —

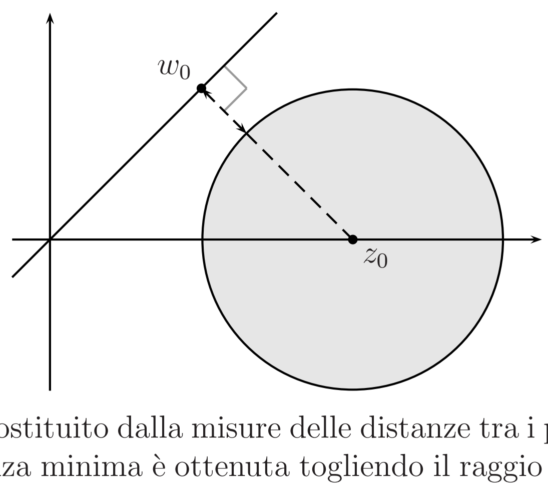
27. Determinare l'estremo superiore e inferiore dell'insieme

$$\{|z - w| \,:\, |z - 2| \leq 1 \text{ e } \mathrm{Re}(w - i\overline{w}) = 0\}\,.$$

R. La disequazione $|z - 2| \leq 1$ individua il cerchio di centro 2 e raggio 1. Posto $w = x + iy$, abbiamo che

$$\mathrm{Re}(w - i\overline{w}) = \mathrm{Re}((x + iy) - i(x - iy)) = x - y = 0$$

e quindi l'equazione $\mathrm{Re}(w - i\overline{w}) = 0$ rappresenta la retta $y = x$.



L'insieme dato è così costituito dalla misure delle distanze tra i punti del cerchio e della retta. Quindi la distanza minima è ottenuta togliendo il raggio della circonferenza alla distanza tra il punto $w_0 = 1 + i$ sulla retta e il centro $z_0 = 2$:

$$\min\{|z - w| \,:\, |z - 2| \leq 1 \text{ e } \mathrm{Re}(w - i\overline{w}) = 0\} = \sqrt{2} - 1.$$

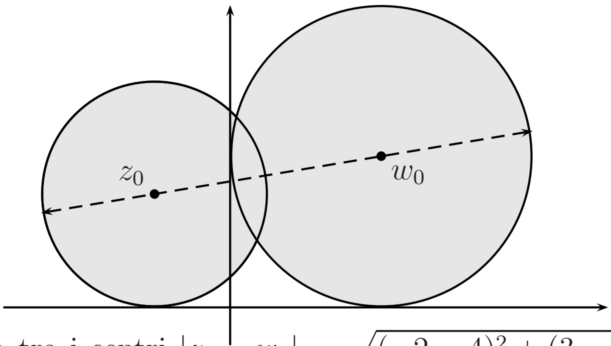
L'estremo superiore delle distanze è invece $+\infty$ perché la retta non è limitata.

— ⋄ —

28. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme

$$\{|z-w| \,:\, |z+2-3i| \leq 3 \text{ e } |w-4-4i| \leq 4\}\,.$$

R. Le disequazioni $|z+2-3i| \leq 3$ e $|w-4-4i| \leq 4$ individuano rispettivamente il cerchio di centro $z_0 = -2+3i$ e raggio 3 e il cerchio di centro $w_0 = 4+4i$ e raggio 4.



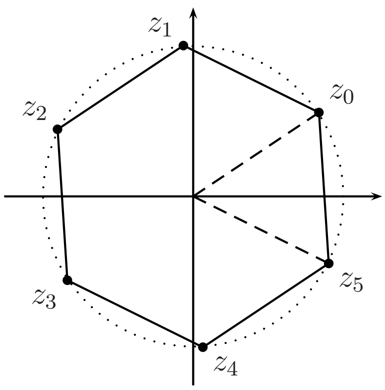
Dato che la distanza tra i centri $|z_0 - w_0| = \sqrt{(-2-4)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{37}$ è minore della somma dei raggi $3+4=7$, i due cerchi si intersecano e il minimo richiesto è 0 mentre il massimo è uguale a $\sqrt{37}+7$ ossia alla distanza dei centri più la somma dei due raggi.

— ⋄ —

29. Calcolare il perimetro del poligono di vertici

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^6 = 1/(3-2i)^6\right\}.$$

R. I vertici sono le radici seste del numero $1/(3-2i)^6$ e quindi individuano un esagono regolare centrato nell'origine.



Per calcolare il perimetro di questo esagono è necessario sapere solo il raggio r della circonferenza circoscritta ovvero il modulo delle radici:

$$r = \left(\left|1/(3-2i)^6\right|\right)^{1/6} = \left(1/\,|3-2i|^6\right)^{1/6} = 1/\,|(3-2i)| = 1/\sqrt{3^2+(-2)^2} = 1/\sqrt{13}.$$

Quindi sapendo che il lato dell'esagono è uguale al raggio r, il perimetro è $6r = 6/\sqrt{13}$.

— ◇ —

30. Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha che

$$|\mathrm{Re}((z+1)(z-3))| \geq |z+1||z-3|.$$

R. Intanto vediamo quando vale la disuguaglianza $|\mathrm{Re}(w)| \geq |w|$. Posto $w = x + iy$ si ha che

$$|\mathrm{Re}(w)| = |x| \geq |w| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

equivale a

$$|x|^2 = x^2 = x^2 + y^2$$

ossia $y = 0$. Dunque $|\mathrm{Re}(w)| \geq |w|$ è soddisfatta se e solo se $\mathrm{Im}(w) = 0$. Quindi per concludere l'esercizio basta trovare per quali $z \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{Im}((z+1)(z-3)) = 0.$$

Di nuovo poniamo $z = x + iy$ così

$$\mathrm{Im}((z+1)(z-3)) = \mathrm{Im}(((x+1)+iy)((x-3)+iy)) = y(x+1)+y(x-3) = 2y(x-1) = 0.$$

Quindi la disuguaglianza vale per tutti i punti sulle rette $y = 0$ e $x = 1$.

— ◇ —

31. Rappresentare nel piano complesso $\mathbb{C}$ l'insieme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ (1+i)z = \sqrt{2}|z| \right\}$$

R. Poniamo $z = x + iy$, così l'equazione diventa

$$(1+i)z = (1+i)(x+iy) = (x-y) + i(x+y) = \sqrt{2}|z| = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Separando la parte reale e immaginaria otteniamo le due equazioni

$$\begin{cases} x - y = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda otteniamo che $y = -x$ e sostituendo la y nella prima si ha che

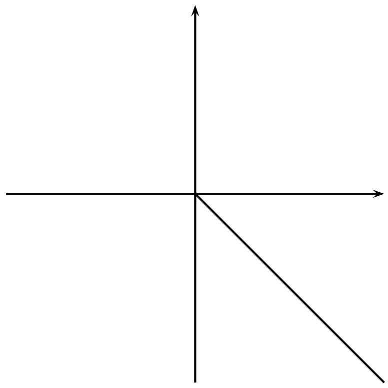
$$x + x = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + (-x)^2}$$

ossia

$$x = \sqrt{x^2} = |x|$$

che è risolta per $x \geq 0$. Quindi l'insieme cercato è la semiretta

$$y = -x \quad \text{per } x \geq 0.$$



— ◇ —

32. Quanti sono i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} z^{10} = 3 + 8i \\ z^5 = 8 - 3i \end{cases} .$$

R. L'equazione $z^{10} = 3 + 8i$ individua 10 punti sulla circonferenza di raggio

$$r_1 = \sqrt[10]{|3 + 8i|} = 73^{1/20}.$$

L'equazione $z^5 = 8 - 3i$ invece individua 5 punti sulla circonferenza di raggio

$$r_2 = \sqrt[5]{|8 - 3i|} = 73^{1/10}.$$

Dato che $r_1 < r_2$ (non occorre calcolare numericamente r_1 e r_2 per stabilire questa relazione!) le due equazioni non possono avere soluzioni in comune e quindi la risposta è 0.