Osserviamo che per trovare le costanti A e B possiamo anche ragionare così: se moltiplichiamo l'equazione

$$\frac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

per $x+2$, dopo aver semplificato, otteniamo

$$\frac{x+1}{x+3} = A + B\,\frac{x+2}{x+3}$$

e ponendo $x = -2$, troviamo immediatamente che $A = -1$. In modo analogo, se moltiplichiamo per $x+3$, otteniamo

$$\frac{x+1}{x+2} = A\,\frac{x+3}{x+2} + B$$

e ponendo $x = -3$, troviamo che $B = 2$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+5x+6}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3}\right) dx \\ &= -\log|x+2| + 2\log|x+3| + c \\ &= \log\frac{(x+3)^2}{|x+2|} + c.\end{aligned}$$

— ⋄ —

Esempio 3.3 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x+4}\,dx.$$

Il polinomio $x^2+4x+4 = (x+2)^2$ ha un'unica radice: -2 di molteplicità due. Se poniamo $t = x+2$ allora $dt = dx$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+4x+4}\,dx = \int \frac{x+3}{(x+2)^2}\,dx &= \int \frac{t+1}{t^2}\,dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \log|t| - \frac{1}{t} + c \\ &= \log|x+2| - \frac{1}{x+2} + c.\end{aligned}$$

— ⋄ —

Esempio 3.4 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+3}\,dx.$$

Il polinomio x^2+2x+3 ha due radici complesse coniugate: $-1 \pm i\sqrt{2}$. Il primo passo consiste nel fare una sostituzione in modo da eliminare il termine di primo grado. In generale, per un polinomio ax^2+bx+c, questo si ottiene con una traslazione della variabile nel punto medio delle soluzioni ossia ponendo $t = x + \frac{b}{2a}$. Nel nostro caso con $t = x+1$ il polinomio x^2+2x+3 diventa t^2+2 e dunque

$$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{4t-5}{t^2+2}\,dt = 4\int \frac{t}{t^2+2}\,dt - 5\int \frac{1}{t^2+2}\,dt$$

Risolviamo il primo integrale

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{t^2+2}\,dt &= \int \frac{1}{t^2+2}\,d\left(\frac{t^2}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+2}\,d(t^2+2)\\ &= \frac{1}{2}\log(t^2+2)+c.\end{aligned}$$

L'assenza del termine di primo grado nel polinomio al denominatore ci permette di determinare subito il secondo integrale

$$\int \frac{1}{t^2+2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c.$$

Quindi, riunendo i risultati e tornando alla variabile x

$$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+3}\,dx = 2\log(x^2+2x+3) - \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

— ◇ —

Se il polinomio al denominatore $Q(x)$ ha grado maggiore di 2 allora bisogna determinarne una fattorizzazione completa (reale) ossia scriverlo come prodotto di fattori di primo grado e fattori di secondo grado irriducibili (con $\Delta < 0$) e quindi si "costruisce" la decomposizione della funzione razionale $P(x)/Q(x)$ come combinazioni lineari di frazioni più semplici:

(1) ad ogni fattore $(x-x_0)^n$ si associano le n *frazioni semplici*

$$\frac{1}{x-x_0},\ \frac{1}{(x-x_0)^2},\ \cdots\ ,\frac{1}{(x-x_0)^n};$$

(2) ad ogni fattore irriducibile $(x^2+bx+c)^m$ si associano le $2m$ frazioni semplici

$$\frac{x}{x^2+bx+c},\ \frac{x}{(x^2+bx+c)^2},\ \cdots\ ,\frac{x}{(x^2+bx+c)^m},$$
$$\frac{1}{x^2+bx+c},\ \frac{1}{(x^2+bx+c)^2},\ \cdots\ ,\frac{1}{(x^2+bx+c)^m}.$$

— ⋄ —

Esempio 3.5 Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{x-1}{x^4+x^2}\,dx.$$

La fattorizzazione completa del polinomio al denominatore è

$$x^4+x^2 = x^2(x^2+1)$$

Al fattore x^2 si associano le frazioni semplici

$$\frac{1}{x} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^2}$$

mentre al fattore irriducibile x^2+1 si associano le frazioni semplici

$$\frac{x}{x^2+1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^2+1}.$$

Quindi la decomposizione è

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx}{x^2+1} + \frac{D}{x^2+1}$$

dove A, B, C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)}$$

e dunque

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A=1$, $B=-1$, $C=-1$ e $D=1$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= \log|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x + c \\ &= \log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x} + \arctan x + c \end{aligned}$$

4. L'integrale definito

Ora che abbiamo un po' di pratica con la ricerca delle primitive calcoliamo qualche integrale definito ricordando il teorema fondamentale.

— ◇ —

Esempio 4.1 Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Prima determiniamo una primitiva della funzione da integrare

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{1+x^2}\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)+c.\end{aligned}$$

Quindi valutiamo

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\log 2}{2}.$$

— ◇ —

Esempio 4.2 Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_{1/e}^{e} \frac{\log x}{x}\,dx.$$

In questo caso il calcolo procede integrando prima $1/x$

$$\int_{1/e}^{e} \frac{\log x}{x}\,dx = \int_{1/e}^{e} \log x\, d\,(\log x) = \frac{1}{2}\left[\log^2 x\right]_{1/e}^{e} = \frac{1-(-1)^2}{2} = 0.$$

— ◇ —

La presenza degli estremi di integrazione permette di individuare un'altra interessante proprietà: l'intervallo di integrazione può essere suddiviso.

Additività rispetto all'intervallo di integrazione

Se f è integrabile in $[a,b]$ e $a \le c \le b$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Si noti inoltre che se si invertono gli estremi di integrazione allora l'integrale cambia di segno

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

— ◇ —

Esempio 4.3 Calcoliamo l'integrale definito
$$\int_0^3 |x^2-1|\,dx.$$
Conviene decomporre l'intervallo di integrazione inserendo un punto di suddivisione in 1 dove la funzione x^2-1 cambia segno. In questo modo possiamo "sbarazzarci" del valore assoluto:
$$\int_0^3 |x^2-1|\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^3 (x^2-1)\,dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^3 = \frac{22}{3}.$$

— ◇ —

Esempio 4.4 Calcoliamo l'integrale definito
$$\int_{-1}^1 (2x+1)\,\arctan x\,dx.$$
Prima applichiamo la linerità:
$$\int_{-1}^1 (2x+1)\,\arctan x\,dx = 2\int_{-1}^1 x\,\arctan x\,dx + \int_{-1}^1 \arctan x\,dx.$$
Ora osserviamo che la funzione $\arctan x$ è dispari ($f(-x)=-f(x)$) e quindi il suo integrale sull'intervallo simmetrico rispetto all'origine $[-1,1]$ vale zero:
$$\int_{-1}^1 \arctan x\,dx = 0.$$
Inoltre, la funzione $x\,\arctan x$ è pari ($f(-x)=f(x)$) e quindi il suo integrale sull'intervallo simmetrico $[-1,1]$ vale il doppio di quello su $[0,1]$:
$$\int_{-1}^1 x\arctan x\,dx = 2\int_0^1 x\arctan x\,dx.$$
Allora l'integrale da calcolare diventa
$$\int_{-1}^1 (2x+1)\,\arctan x\,dx = 4\int_0^1 x\,\arctan x\,dx.$$
Proseguiamo il calcolo integrando per parti
$$\begin{aligned}4\int_0^1 x\,\arctan x\,dx &= 4\int_0^1 \arctan x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)\\ &= 4\left[\frac{x^2}{2}\,\arctan x\right]_0^1 - 4\int_0^1 \frac{x^2}{2}d\,(\arctan x)\\ &= \frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 x^2\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx\\ &= \frac{\pi}{2} - 2\big[x-\arctan x\big]_0^1 = \pi - 2.\end{aligned}$$

5. L'integrale improprio

Nella sezione precedente abbiamo visto qualche calcolo di integrale definito. Le funzioni da integrare erano continue su tutto l'intervallo limitato $[a, b]$. Ora proviamo ad ampliare la definizione di integrale anche al caso in cui la funzione sia continua solo su $[a, b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Se l'intervallo non è limitato ossia $b = +\infty$ si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Se il limite esiste finito allora l'integrale *improprio* si dice *convergente* e la funzione si dice integrabile su $[a, b)$. Il caso in cui la funzione sia continua solo su $(a, b]$ è assolutamente analogo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx.$$

— ◇ —

Esempio 5.1 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sappiamo già che

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c.$$

Allora l'integrale improprio su $[1, +\infty)$ vale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = [\log|x|]_1^{+\infty} = +\infty.$$

Inoltre l'integrale improprio su $(0, 1)$ vale

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \big[\log|x|\big]_{0^+}^1 = +\infty.$$

In entrambi i casi gli integrali impropri non sono convergenti.

— ◇ —

Esempio 5.2 Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

con $\alpha > 0$ e diverso da 1. Abbiamo visto che

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + c.$$

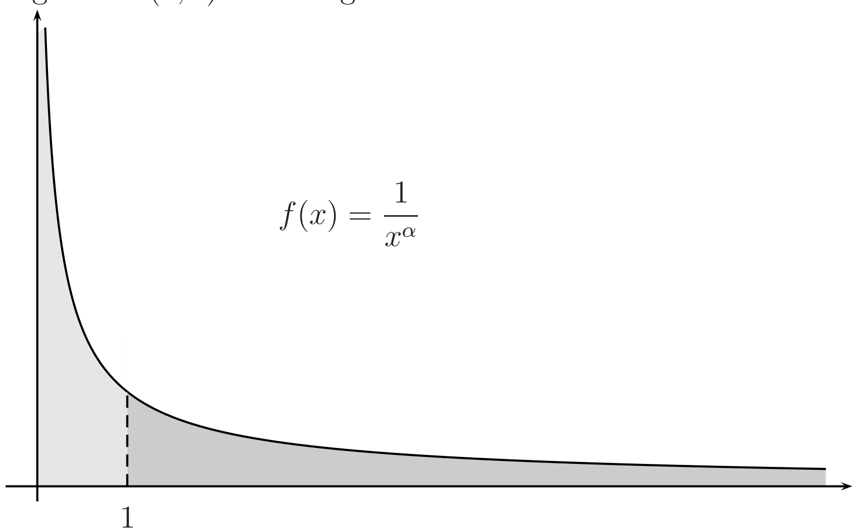
Allora l'integrale improprio su $[1, +\infty)$ vale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale su $(1, +\infty)$ è convergente se e solo se $\alpha > 1$.
Inoltre l'integrale improprio su $(0, 1)$ vale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{0^+}^{1} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale su $(0, 1)$ è convergente se e solo se $\alpha < 1$.



— ◇ —

Esempio 5.3 Calcoliamo l'integrale

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta} \quad \text{per } \beta \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\int \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,dx = \int \frac{1}{(\log x)^\beta}\,d(\log x) = \begin{cases} \dfrac{(\log x)^{1-\beta}}{1-\beta} + c & \text{se } \beta \neq 1 \\ \log|\log x| + c & \text{se } \beta = 1 \end{cases}$$

L'integrale improprio su $(e, +\infty)$ vale

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} & \text{se } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \leq 1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale è convergente se e solo se $\beta > 1$.

— ◇ —

Esempio 5.4 Calcoliamo l'integrale

$$\int_0^{1/e} \frac{1}{x|\log x|^\beta}\,dx \quad \text{per } \beta \in \mathbb{R}.$$

Se cambiamo variabile ponendo $y = 1/x$ possiamo ricondurre questo integrale improprio al precedente:

$$\int_{+\infty}^{e} \frac{y}{|\log 1/y|^\beta}\left(-\frac{dy}{y^2}\right) = \int_e^{+\infty} \frac{1}{y(\log y)^\beta}\,dy = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} & \text{se } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \leq 1 \end{cases}$$

Quindi l'integrale è convergente se e solo se $\beta > 1$.

— ◇ —

Esempio 5.5 Calcoliamo l'integrale improprio

$$\int_{e^3}^{+\infty} \frac{1}{x\,(\log^2 x - 4)}\,dx$$

La funzione data è continua in $[e^3, +\infty)$. Per calcolare il valore dell'integrale improprio dobbiamo prima determinare una primitiva. Per $x > 0$

$$\int \frac{1}{x\,(\log^2 x - 4)}\,dx = \int \frac{1}{\log^2 x - 4}\,d(\log x) = \int \frac{1}{t^2 - 4}\,dt.$$

dopo aver posto $t = \log x$. Decomponiamo la funzione razionale

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{1}{(t+2)(t-2)} = \frac{1}{4}\frac{1}{t-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{t+2}.$$

Ora possiamo completare il calcolo della primitiva

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\,(\log^2 x - 4)}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-2}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+2}\,dt \\ &= \frac{1}{4}\log|t-2| - \frac{1}{4}\log|t+2| + c \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{\log x - 2}{\log x + 2}\right| + c. \end{aligned}$$

Ora basta valutare la primitiva agli estremi di integrazione

$$\left[\frac{1}{4}\log\left|\frac{\log x - 2}{\log x + 2}\right|\right]_{e^3}^{+\infty} = 0 - \frac{1}{4}\log\left|\frac{3-2}{3+2}\right| = \frac{\log 5}{4}.$$

6. Criteri di convergenza per integrali impropri

In molti casi è possibile dire se un integrale improprio converge o meno senza affrontare il problema della "faticosa" determinazione di una primitiva. Esistono infatti dei *criteri di convergenza* del tutto simili a quelli già studiati per le serie (anche gli integrali sono delle "somme infinite").

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano f e g due funzioni continue tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{per } x \in [a, b).$$

Allora

(1) Se $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge allora anche $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

(2) Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ allora anche $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$.

— ⋄ —

Esempio 6.1 Proviamo che l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

è convergente.
In questo caso la determinazione di una primitiva della funzione positiva e^{-x^2} sarebbe addirittura proibitiva (si dimostra infatti che esiste una primitiva, ma che questa non è esprimibile come composizione di funzioni elementari!). Il fatto che la funzione tenda a zero "molto velocemente" per $x \to +\infty$ ci suggerisce però di applicare il punto (1) del criterio del confronto. Si tratta allora di individuare una funzione che maggiori quella data e il cui integrale improprio sia convergente. La funzione e^{-x} ha proprio questa proprietà:

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \text{per } x \geq 1 \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{e}.$$

Quindi l'integrale dato è convergente e

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}$$

— ⋄ —

Esempio 6.2 Il criterio del confronto può essere anche utile per determinare se una certa serie converge o meno. Ad esempio vediamo come con questa tecnica possiamo provare che la serie $\sum_1^{+\infty} 1/n$ diverge.
Dato che la funzione $1/x$ è decrescente per $x > 0$ abbiamo che

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} \quad \text{per } x \in [n, n+1]$$

e quindi integrando su questo intervallo otteniamo che

$$\frac{1}{n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx.$$

Infine sommiamo facendo variare l'indice n da 1 a infinito

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty.$$

— ◇ —

Criterio del confronto asintotico

Siano f e g due funzioni continue positive $[a, b)$ tali che

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Se $0 < L < +\infty$ ossia $f \sim Lg$ per $x \to b^-$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ converge se e solo se } \int_a^b g(x)\,dx \text{ converge.}$$

Per l'applicazione del criterio del confronto asintotico abbiamo bisogno di un "repertorio" di integrali impropri di cui conosciamo le proprietà di convergenza. Qui riassumiamo i risultati di cui avremo bisogno e che in parte sono già stati dimostrati negli esempi precedenti.

Integrali impropri principali

(1) Se $a < b$ allora

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

(2) Se $a > 1$ allora

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases}$$

(3) Se $0 < b < 1$ allora

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha < 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases}$$

— ◇ —

Esempio 6.3 Determiniamo per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^5 \frac{1}{x^a\,(\log(1+x))^2}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$.
La funzione data è continua sull'intervallo $(0, +\infty)$ e quindi dobbiamo fare un'analisi asintotica sia per $x \to 0^+$ che per $x \to +\infty$.
Cominciamo con $x \to 0^+$

$$\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^5 \frac{1}{x^a\,(\log(1+x))^2} \sim \left(\frac{x}{2}\right)^5 \frac{1}{x^a\,(x)^2} \sim \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{x^{a+2-5}} = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{x^{a-3}}.$$

Dunque la funzione è integrabile "vicino" a 0^+ se $\alpha = a - 3 < 1$ ossia se $a < 4$. Vediamo cosa succede per $x \to +\infty$

$$\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^5 \frac{1}{x^a\,(\log(1+x))^2} \sim \frac{1}{x^a\,(\log x)^2}.$$

Dunque la funzione è integrabile "verso" $+\infty$ se $\alpha = a \geq 1$ (l'esponente del logaritmo è $2 > 1$). Unendo le due condizioni abbiamo che $1 \leq a < 4$.

— ◇ —

Esempio 6.4 Determiniamo per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1 - \cos x}{\sqrt[3]{x}\,(\sin x)^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, \pi)$.
Per determinare la convergenza basta fare un'analisi asintotica agli estremi dell'intervallo di integrazione. Per $x \to 0^+$

$$\frac{1 - \cos x}{\sqrt[3]{x}\,(\sin x)^a} \sim \frac{x^2/2}{x^{1/3}\,x^a} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{a+1/3-2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{a-5/3}}.$$

Dunque la funzione è integrabile "vicino" a 0^+ se $\alpha = a - 5/3 < 1$ ossia se $a < 8/3$. Invece, per $x \to \pi^-$

$$\frac{1 - \cos x}{\sqrt[3]{x}\,(\sin x)^a} = \frac{1 - \cos x}{\sqrt[3]{x}\,(\sin(\pi - x))^a} \sim \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}} \cdot \frac{1}{(\pi - x)^a}.$$

Dunque la funzione è integrabile "vicino" a π^- se $\alpha = a < 1$. Unendo le due condizioni abbiamo che $a < 1$.

— ◇ —

Concludiamo con un cenno al problema della integrabilità impropria per una funzione di segno non costante. In questo caso infatti i criteri precedenti non sono applicabili. Vale però il seguente risultato (analogo a quello per le serie).

CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

Se $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

— ◇ —

Esempio 6.5 Proviamo che l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

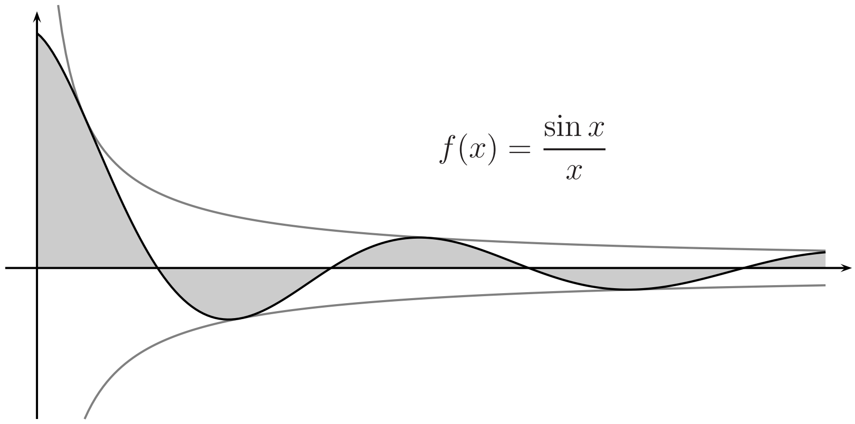
converge.
Per $x > 0$

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2},$$

inoltre $1/x^2$ è integrabile in $[1, +\infty)$ e quindi per il criterio del confronto anche la funzione (positiva) $|\sin x/x^2|$ è integrabile in $[1, +\infty)$. Quindi l'integrale improprio converge per il criterio della convergenza assoluta. Si osservi che anche l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

converge, anche se il ragionamento precedente non è applicabile perchè la funzione $1/x$ non è integrabile in $[1, +\infty)$.



La convergenza si può invece spiegare osservando il grafico della funzione: si tratta di oscillazioni "modulate" dalle funzioni $\pm 1/x$. L'integrale improprio da calcolare è la serie i cui termini corrispondono alle aree delle singole "gobbe". Tali aree hanno segno alterno (perché stanno alternativamente sopra e sotto l'asse x) e decrescono in valore assoluto a zero (questa affermazione andrebbe dimostrata!). Quindi la serie (e anche l'integrale) converge per il criterio di Leibniz.