

# Matematica Discreta

Martedì 7 settembre 2010

---

**Esercizio 1.** Si consideri la successione  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  con

$$a_n = \underbrace{111 \cdots 1}_{n+1} \underbrace{555 \cdots 5}_n 6.$$

I primi termini sono: 16, 1156, 111556, 11115556, 1111155556.

- (a) Determinare per quali  $n \geq 0$ ,  $a_n$  è divisibile per 7.
- (b) Dimostrare che ogni  $a_n$  è un quadrato perfetto.

---

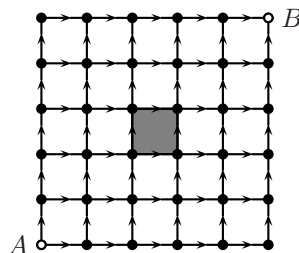
**Esercizio 2.** Un rettangolo  $3 \times 2n$  con delle barriere verticali di lunghezza 1 disposte in modo alternato lungo i lati orizzontali deve essere ricoperto con tessere rettangolari  $2 \times 1$  o  $1 \times 2$  in modo che ogni tessera non attraversi le barriere. Qui sotto è rappresentato il caso  $n = 5$ :



- (a) Calcolare la funzione generatrice  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  dove  $a_n$  è il numero di tali ricoprimenti.
- (b) Determinare per quali  $n \geq 1$  il numero  $a_n$  è divisibile per 3.
- (c) Calcolare il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n$ .

---

**Esercizio 3.** Nella seguente griglia, partendo da  $A$  si procede verso  $B$  scegliendo in modo equiprobabile tra le direzioni consentite.



- (a) Quanti sono i possibili percorsi da  $A$  a  $B$ ?
- (b) Qual è la probabilità che il percorso passi lungo i lati del quadrato evidenziato in grigio?

---

**Esercizio 4.** Partendo da un numero intero  $n \geq 2$ , due giocatori a turno possono decrementare il numero corrente  $x$  a  $x - 1$  oppure a  $\lfloor x/2 \rfloor$ . Vince chi per primo raggiunge il numero 1. Determinare per quali numeri iniziali  $n$  il gioco è favorevole al primo giocatore e descrivere la sua strategia.

---