

Matematica Discreta

Venerdì 7 maggio 2010

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$

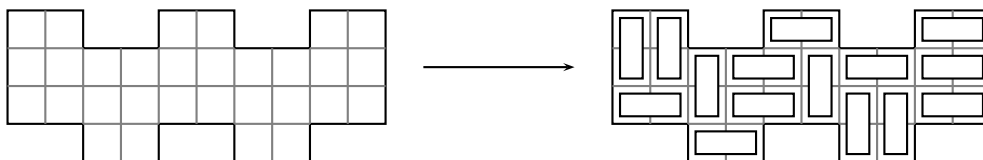
$$a_n := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} 4^k = \frac{3^n - (-1)^n}{4}.$$

Per quali n il numero a_n è divisibile per 100?

Esercizio 2. Un mazzo contiene 20 carte: le carte di cuori, quadri, picche e fiori con valori dall'asso al 5. Da tale mazzo si estraggono 5 carte.

- (a) Calcolare la probabilità che le 5 carte contengano almeno un asso O almeno una carta di cuori.
(b) Calcolare la probabilità che le 5 carte contengano almeno un asso E almeno una carta di cuori.
-

Esercizio 3. Un poligono è formato da n rettangoli 3×2 uniti lungo una parte del lato lungo e disposti in modo alternato. Tale poligono deve essere ricoperto con tessere rettangolari 2×1 o 1×2 . Qui sotto è rappresentato il caso $n = 5$:



Denotiamo con a_n il numero di tali ricoprimenti.

- (a) Determinare una formula chiusa per a_n e calcolare a_5 .
(b) Dimostrare che $3^n \leq a_n \leq 4^n$ per ogni n intero positivo.
(c) Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.
-

Esercizio 4. I 12 spigoli di un cubo devono essere colorati. Contare le configurazioni non equivalenti nei seguenti due casi:

- (a) i colori sono n ;
(b) due spigoli devono essere rossi e i rimanenti blu (disegnare le configurazioni).
-

Esercizio 5. Partendo da un numero intero $n \geq 0$, due giocatori a turno possono:

- sottrarre 1 o 2 se il numero è dispari e maggiore di 1;
- sottrarre 1 o dividere per 2 se il numero è pari e maggiore di 0;
- sottrarre 1 se il numero è uguale a 1.

Vince chi riesce per primo riesce a ottenere 0.

Nella seguente partita, iniziando da 24, riesce a vincere il 2° giocatore:

$$24 \xrightarrow{1^\circ \text{gioc}} 12 \xrightarrow{2^\circ \text{gioc}} 11 \xrightarrow{1^\circ \text{gioc}} 9 \xrightarrow{2^\circ \text{gioc}} 8 \xrightarrow{1^\circ \text{gioc}} 4 \xrightarrow{2^\circ \text{gioc}} 2 \xrightarrow{1^\circ \text{gioc}} 1 \xrightarrow{2^\circ \text{gioc}} 0$$

Determinare per quali n è favorito il primo giocatore e indicare in tali casi quale deve essere la sua prima mossa.
