

# Matematica Discreta

Secondo Esonero - Giovedì 27 aprile 2006

---

**Esercizio 1.** Supponiamo di avere un mazzo di 40 carte (4 semi e valori da 1 a 10).

Calcolare la probabilità che in una mano di 5 carte:

- (a) ci sia almeno un 1, un 2 e un 3;
- (b) ci sia almeno un 1, un 2 e un 3 e tutte le carte della mano di valore minore o uguale 3 abbiano semi diversi.

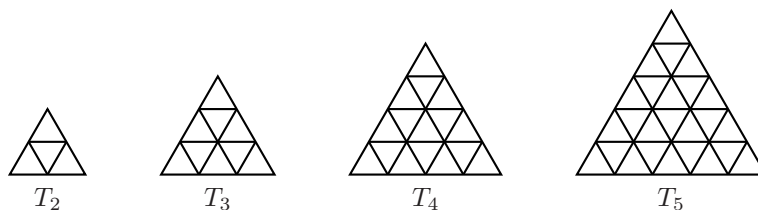
---

**Esercizio 2.** Da un insieme di  $n$  elementi vengono scelti a caso due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  (ogni sottoinsieme ha la stessa la probabilità di essere scelto).

- (a) Qual è la probabilità che  $|A \cap B| = k$  per  $k = 0, 1, \dots, n$ ?
- (b) Per quale  $k$  tale probabilità è massima?

---

**Esercizio 3.** Denotiamo con  $T_n$  un triangolo equilatero di lato  $n \geq 2$  suddiviso in triangoli di lato 1 nel seguente modo:



I singoli triangoli di lato 1 vengono colorati di rosso o di blu.

- (a) Quante sono le colorazioni di  $T_n$  non equivalenti per rotazione?
- (b) Quante sono le colorazioni di  $T_n$  non equivalenti per rotazione e simmetria?

---

**Esercizio 4.** Dato un numero intero  $n \geq 2$ , due giocatori a turno possono:

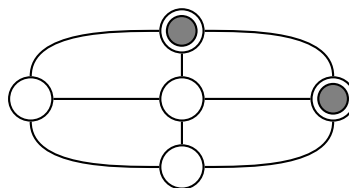
- sottrarre 1 al numero corrente;
- dividere il numero corrente per un suo divisore primo.

Vince il giocatore che riesce a ottenere 1.

- (a) Determinare i numeri interi nell'intervallo  $[2, 24]$ , che sono favorevoli al primo giocatore.
- (b) Supponendo che il numero iniziale sia scelto *casualmente* come il doppio della somma degli esiti di due dadi, qual è la probabilità che il gioco sia favorevole al primo giocatore?

---

**Esercizio 5.** Due pedine sono posizionate sul seguente grafo:



Le pedine iniziano a muoversi e allo scattare di ogni minuto ciascuna si sposta su un altro nodo scelto a caso con uguale probabilità tra quelli adiacenti al nodo in cui si trova. Le pedine si fermano quando si trovano contemporaneamente sullo stesso nodo.

- (a) Determinare dopo 4 minuti la probabilità che le pedine siano ferme.
- (b) Determinare dopo 4 minuti la stessa probabilità nell'ipotesi in cui si muova solo una delle due pedine.

---

**Esercizio 6.** Consideriamo una striscia di caselle lunga  $n$ . Due giocatori a turno possono:

- posizionare una tessera  $1 \times 2$  sulla striscia;
- tagliare una componente della striscia in due sottostrisce non vuote.

Perde il giocatore che non può più muovere.

- (a) Calcolare il valore della funzione di Grundy per la striscia lunga  $n$ .
- (b) Valutare la seguente posizione di gioco e, se fosse favorevole, indicare tutte le mosse vincenti.

