

# Matematica Discreta

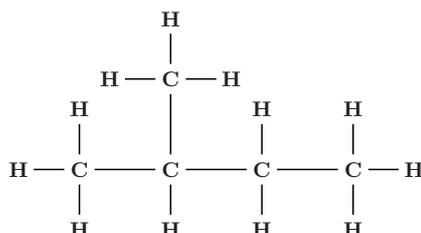
Primo Esonero - Giovedì 30 marzo 2006

**Esercizio 1.** Provare che per  $n \geq 1$ :

(a) il numero di Fibonacci  $F_{5n}$  è divisibile per 5;

(b)  $\prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \cdot \prod_{k=1}^n (2k-1)$ .

**Esercizio 2.** Negli *alcani* gli atomi di carbonio sono tetraivalenti e formano una catena aperta ramificata con atomi di idrogeno alle estremità. Un esempio di alcano è il seguente



(a) Completa la formula generica di un alcano:  $\text{C}_n \text{H}_?$ .

(b) Se un albero ha tutti i vertici interni di grado costante  $d \geq 2$  e i vertici interni sono  $n$  quanti sono i vertici alle estremità?

**Esercizio 3.** La funzione di codifica RSA con chiave pubblica  $(899, 11)$  è

$$f(x) = x^{11} \pmod{899}.$$

(a) Determinare la funzione di decodifica  $f^{-1}$ .

(b) Calcolare  $f^{-1}(737) \pmod{899}$ .

**Esercizio 4.** Una successione di interi  $a(n)$  soddisfa la seguente equazione ricorsiva

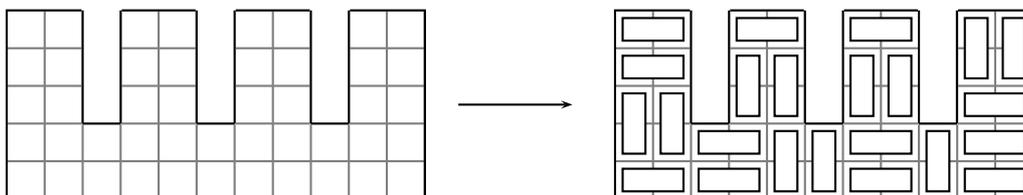
$$a(0) = 0 \quad \text{e} \quad a(n+1) = 3 \cdot a(n) + 4 \cdot n + 5 \cdot 3^n \quad \text{per } n \geq 0.$$

(a) Determinare una formula chiusa per  $a(n)$ .

(b) È vero che infiniti termini della successione  $a(n)$  sono divisibili per 10?

**Esercizio 5.** Ogni punto del reticolo  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  è colorato con un colore scelto tra  $n \geq 1$  possibili. Per quali  $n$  è sempre possibile determinare 2 punti dello stesso colore tali che la loro distanza sia maggiore di 100 e il segmento che li unisce non contenga altri punti del reticolo?

**Esercizio 6.** Una figura a *pettine* con  $n$  *denti* deve essere ricoperta con tessere rettangolari  $2 \times 1$  o  $1 \times 2$ . Qui sotto è rappresentato il caso  $n = 4$ :



Denotiamo con  $a_n$  il numero di tali ricoprimenti.

(a) Determinare una formula chiusa per  $a_n$  e calcolare  $a_4$ .

(b) Qual è il comportamento asintotico di  $a_n$ ?