

Esercizio 1. Provare che per $n \geq 1$:

- (a) il numero $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ è pari;
- (b) il numero $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^5$ non è mai divisibile per 5.
-

Esercizio 2. Da un insieme di n elementi vengono scelti a caso due sottoinsiemi A e B .

- (a) Qual è la probabilità che $A \subseteq B$ o $A \supseteq B$?
- (b) Qual è la probabilità che A e B siano disgiunti?
- (c) Confrontare le due probabilità al variare di n .
-

Esercizio 3. Partendo da un numero razionale positivo p/q due giocatori a turno possono:

- togliere 1 al numeratore se questo è maggiore di 1;
- togliere 1 al denominatore se questo è maggiore di 1;

Dopo ciascuna mossa la frazione viene ridotta ai minimi termini e vince chi riesce a ottenere 1.

Esempio: nella seguente partita, iniziando da $15/11$, riesce a vincere il 2° giocatore

$$\frac{15}{11} \xrightarrow{1^\circ \text{ gioc}} \frac{14}{11} \xrightarrow{2^\circ \text{ gioc}} \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \xrightarrow{1^\circ \text{ gioc}} \frac{7}{4} \xrightarrow{2^\circ \text{ gioc}} \frac{7}{3} \xrightarrow{1^\circ \text{ gioc}} \frac{6}{3} = 2 \xrightarrow{2^\circ \text{ gioc}} 1$$

Supponendo che il numeratore e il denominatore della frazione iniziale siano la somma degli esiti di due dadi qual è la probabilità che il gioco sia favorevole al 1° giocatore?
