

Matematica Discreta

Esercizi della sesta settimana - Venerdì 16 aprile 2010

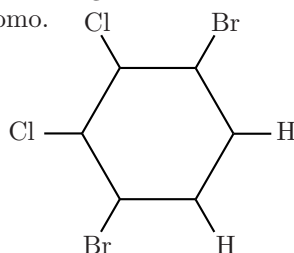
Esercizio 1. Da un insieme di n elementi vengono scelti a caso due sottoinsiemi A e B (ogni sottoinsieme ha la stessa probabilità di essere scelto).

- (a) Qual è la probabilità che $|A \cap B| = k$ per $k = 0, 1, \dots, n$?
 (b) Per quale k tale probabilità è massima?

Esercizio 2. Un punto si muove lungo i lati di un triangolo equilatero: percorre ogni lato in un minuto e da ogni vertice prosegue lungo uno dei due lati con la stessa probabilità.

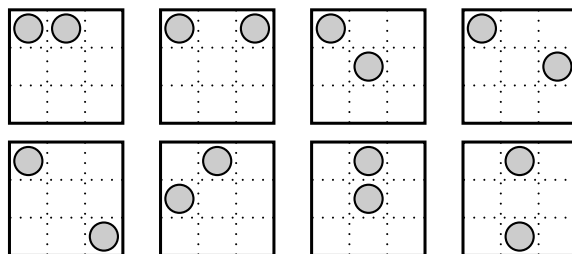
- (a) Qual è la probabilità p_n che il punto si ritrovi sul vertice iniziale dopo n minuti?
 (b) Quanto vale $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$?

Esercizio 3. La formula chimica $C_6H_2Cl_2Br_2$ corrisponde alla seguente struttura: i sei atomi di carbonio sono posizionati ai vertici di un esagono e a ciascuno di questi sono legati i due atomi di idrogeno, i due di cloro e i due di bromo.



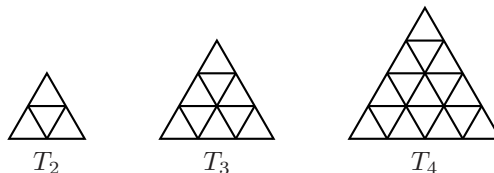
Quante sono le molecole “topologicamente” non equivalenti?

Esercizio 4. Un’industria meccanica deve fabbricare dei pannelli metallici quadrati con due fori in posizione generica rispetto ad una griglia $n \times n$. Dato che i pannelli possono essere girati e ruotati molte configurazioni sono equivalenti. Per esempio se $n = 3$ il numero totale di configurazioni è 36, ma quelle effettivamente necessarie sono solo 8:



- (a) Calcolare il numero minimo di configurazioni $p(n)$ al variare di $n \geq 2$.
 (b) Se $t(n)$ rappresenta il numero totale di configurazioni quanto vale il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{t(n)}$?

Esercizio 5. Denotiamo con T_n un triangolo equilatero di lato $n \geq 2$ suddiviso in triangoli di lato 1 nel seguente modo:



I singoli triangoli di lato 1 vengono colorati di rosso o di blu.

- (a) Quante sono le colorazioni di T_2 , T_3 e T_4 non equivalenti per rotazione?
 (b) Quante sono le colorazioni di T_2 , T_3 e T_4 non equivalenti per rotazione e simmetria?

Esercizio 6. Gli 8 vertici di un cubo devono essere colorati. Contare le configurazioni non equivalenti nei seguenti due casi:

- (a) i colori sono n (valutare numericamente il caso $n = 2$);
 (b) i colori sono 2 e devono essere usati per lo stesso numero di vertici.