Laboratorio di Matematica

Foglio n.1 - 9 ottobre 2012

Problema 1. Sia $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ una funzione biunivoca dove $\mathbb{N}^+$ è l'insieme degli interi positivi. Supponiamo che esista e sia finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = L.$$

Quali sono i possibili valori di L?

Soluzione. Dimostriamo che 1 è l'unico valore ammissibile di L (che si può ottenere per $f = \mathrm{id}$). Sia $L \in [0, +\infty] \setminus \{1\}$. Se $L > 1$ allora esiste un intero $n_0 > 0$ tale che per ogni $n > n_0$, $f(n) > n$. Quindi $f([n_0 + 1, +\infty))$, sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}^+$, ammette un minimo e esiste un intero $n_1 > n_0$ tale che

$$f([n_0 + 1, +\infty)) \subset [f(n_1), +\infty),$$

con $f(n_1) > n_1$. Così, dato che f è suriettiva, necessariamente

$$f([1, n_0]) \supset [1, f(n_1) - 1],$$

ma questo non è possibile perché $f(n_1) - 1 \geq n_1 > n_0$.
Se $0 \leq L < 1$ allora, dato che la funzione inversa f^{-1} è biunivoca e $f^{-1}(n)$ è una successione che tende a $+\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{f(n)} = \frac{1}{L} > 1$$

contraddicendo quanto detto prima. □

Problema 2. Sia P un polinomio in $\mathbb{Z}[x]$, non costante, tale che tutti i suoi coefficienti sono maggiori o uguali a -1. Dimostrare che se $P(2) = 0$ allora $P(1) \geq 1$.

Soluzione. Sia $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_n \neq 0$. Dato che $P(2) = 0$ allora esiste un polinomio $Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ a coefficienti interi tale che $P(x) = (x-2)Q(x)$. Quindi

$$a_0 = -2b_0,\ a_i = b_{i-1} - 2b_i \text{ per } i = 1, \dots, n-1 \text{ e } a_n = b_{n-1}.$$

L'ipotesi $a_i \geq -1$ per $i = 0, \dots, n$ implica che $b_{n-1} = a_n \geq -1$,

$$b_i = -\sum_{k=0}^{i} \frac{a_{i-k}}{2^{k+1}} \leq \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{2^{k+1}} < 1 \text{ per } i = 0, \dots, n-1.$$

Siccome b_i è intero, si ha che $b_i \leq 0$ per $i = 0, \dots, n-1$. Inoltre da $-1 \leq a_{n-1} = b_{n-1} \leq 0$ e $a_{n-1} \neq 0$ si ottiene $b_{n-1} = -1$. Infine,

$$P(1) = (1-2)Q(1) = -b_{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} b_i \geq -b_{n-1} = 1.$$

□

Problema 3. Siano n e k interi tali che $1 \le k \le n$. Determinare il numero delle permutazioni π di $\{1, \dots, n\}$ tali che

$$\{\pi^m(i) \;:\; m \ge 1, 1 \le i \le k\} = \{1, \dots, n\},$$

dove π^m indica la permutazione ottenuta componendo m volte π.

Soluzione. Notiamo che una permutazioni π di $\{1, \dots, n\}$ soddisfa la condizione

$$\{\pi^m(i) \;:\; m \ge 1, 1 \le i \le k\} = \{1, \dots, n\},$$

e diciamo che $\pi \in S(n,k)$, se e solo se ogni suo ciclo contiene un elemento dell'insieme $\{1, \dots, k\}$. Questo implica che $|S(k,k)| = k!$. Inoltre, ogni permutazione in $S(n+1,k)$ si ottiene precisamente prendendo una permutazione in $S(n,k)$ e aggiungendo l'elemento $n+1$ in uno dei cicli esistenti in una delle possibili n posizioni. Quindi vale la seguente relazione ricorsiva

$$|S(n+1,k)| = n|S(n,k)|.$$

Così,

$$\begin{aligned}|S(n,k)| &= (n-1)|S(n-1,k)| = (n-1)(n-2)|S(n-2,k)| \\ &= (n-1)\cdots k|S(k,k)| = (n-1)\cdots k \cdot k! = k \cdot (n-1)!.\end{aligned}$$

$\square$

Problema 4. Lungo una circonferenza di raggio unitario ci sono 100 punti, $Q_1, Q_2, \dots, Q_{100}$. Dimostrare che su tale circonferenza esiste un punto P tale che

$$\sum_{k=1}^{100} |P - Q_k| \le 134.$$

Soluzione. Per $k = 1, \dots, 100$, consideriamo la funzione continua $[0, 2\pi] \ni t \to f_k(t) = |P - Q_k|$ con $P = e^{it}$ e $Q_k = e^{it_k}$. La media di f_k sulla circonferenza unitaria rispetto alla misura di Lebesgue su tale circonferenza vale

$$\begin{aligned}E(f_k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{i(t-t^k)} - 1|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{it} - 1|dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t - 1)^2 + (\sin t)^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t/2)dt = \frac{4}{\pi}.\end{aligned}$$

Quindi il valore medio della funzione continua $\sum_{k=1}^{100} f_k(t)$ vale $\sum_{k=1}^{100} E(f_k) = 400/\pi \approx 127.32395$. Così, per il teorema della media integrale, esiste un punto P sulla circonferenza unitaria tale che

$$\sum_{k=1}^{100} |P - Q_k| = \frac{400}{\pi} < 128 < 134.$$

$\square$

Problema 5. Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $f : X \to X$ una funzione tale che

$$d(x, y) \le d(f(x), f(y)) \quad \text{per ogni } x, y \in X.$$

Dimostrare che f è continua oppure confutare tale affermazione trovando un controesempio.

Soluzione. Dimostriamo che la funzione f è una isometria e quindi è effettivamente continua. Siano $x, y \in X$. Dato che $d(x, y) \le d(f(x), f(y))$, basta far vedere che per ogni $\delta > 0$,

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) + \delta.$$

Per la compattezza di X esistono un numero finito di punti $z_1, z_2, \ldots, z_N \in X$ tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B(z_i, \delta/4)$$

dove $B(z, r)$ è l'intorno sferico aperto in X, di centro z e raggio r. Quindi esistono $1 \le i_1, i_2 \le N$ tali che per infiniti indici $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$,

$$f^{n_k}(x) \in B(z_{i_1}, \delta/4) \quad \text{e} \quad f^{n_k}(y) \in B(z_{i_2}, \delta/4)$$

dove f^n indica la funzione f composta n volte. Ora per ipotesi, per $j > k$,

$$\begin{aligned} d(x, f^{n_j - n_k}(x)) &\le d(f^{n_k}(x), f^{n_j}(x)) \le d(f^{n_k}(x), z_{i_1}) + d(f^{n_j}(x), z_{i_1}) < \delta/2, \\ d(y, f^{n_j - n_k}(y)) &\le d(f^{n_k}(y), f^{n_j}(y)) \le d(f^{n_k}(y), z_{i_2}) + d(f^{n_j}(y), z_{i_2}) < \delta/2. \end{aligned}$$

Così, ancora per ipotesi e per quanto visto,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\le d(f^{n_j - n_k}(x), f^{n_j - n_k}(y)) \\ &\le d(f^{n_j - n_k}(x), x) + d(x, y) + d(y, f^{n_j - n_k}(y)) < d(x, y) + \delta. \end{aligned}$$

□
