Laboratorio di Matematica
Foglio n.1 - 9 ottobre 2012

Problema 1. Sia $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ una funzione biunivoca dove $\mathbb{N}^+$ è l'insieme degli interi positivi. Supponiamo che esista e sia finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = L.$$

Quali sono i possibili valori di L?

Problema 2. Sia P un polinomio in $\mathbb{Z}[x]$, non costante, tale che tutti i suoi coefficienti sono maggiori o uguali a -1. Dimostrare che se $P(2) = 0$ allora $P(1) \geq 1$.

Problema 3. Siano n e k interi tali che $1 \leq k \leq n$. Determinare il numero delle permutazioni π di $\{1, \dots, n\}$ tali che

$$\{\pi^m(i) \ : \ m \geq 1, 1 \leq i \leq k\} = \{1, \dots, n\},$$

dove π^m indica la permutazione ottenuta componendo m volte π.

Problema 4. Lungo una circonferenza di raggio unitario ci sono 100 punti, $Q_1, Q_2, \dots, Q_{100}$. Dimostrare che su tale circonferenza esiste un punto P tale che

$$\sum_{k=1}^{100} |P - Q_k| \leq 134.$$

Problema 5. Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $f : X \to X$ una funzione tale che

$$d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \quad \text{per ogni } x, y \in X.$$

Dimostrare che f è continua oppure confutare tale affermazione trovando un controesempio.
