

Secondo appello di Laboratorio di Matematica

11 luglio 2013

Problema 1. Dimostrare che se x_1, \dots, x_n sono numeri reali positivi allora

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq \frac{4n}{\sum_{k=1}^n x_k(x_k + 2) + n}.$$

Problema 2. Siano P_1, P_2, \dots, P_n i vertici di un poligono regolare di n lati dove n è un intero dispari maggiore di 2.

- i) Quanti sono i triangoli $\triangle P_i P_j P_k$ che sono rettangoli?
- ii) Quanti sono i triangoli $\triangle P_i P_j P_k$ che contengono il centro del poligono?

Problema 3. Sia X un insieme non vuoto e sia $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tale che

$$A \subseteq B \subseteq X \quad \Rightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

Dimostrare o confutare che esiste $C \subseteq X$ tale che $f(C) = C$.

Problema 4. Siano n_1, n_2, \dots, n_r dei numeri interi, non primi, maggiori di 1, tali che $\gcd(n_i, n_j) = 1$ per ogni $1 \leq i < j \leq r$. Dimostrare che

$$\sum_{j=1}^r \frac{1}{n_j} < \frac{2}{3}.$$
