Primo appello di Laboratorio di Matematica

6 giugno 2013

Problema 1. Sia n un numero intero positivo. Qual è la cardinalità massima di un sottoinsieme A di $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ tale che se $x \in A$ allora $2x \notin A$.

Soluzione. Per soddisfare la richiesta per gli elementi di A, per ogni intero d dispari in $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ dobbiamo scegliere nella sequenza

$$d, 2d, 4d, 8d, 16d, \ldots, 2^k d \qquad \text{dove } k = \lfloor \log_2(2^n/d) \rfloor,$$

dei numeri che non siano adiacenti. Così per massimizzare la cardinalità di A basta prendere i numeri $d, 4d, 16d, \ldots$. Dato che i numeri della forma $4^k d$ in $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ sono quelli che sono divisibili per 4^k ma non sono divisibili per $2 \cdot 4^k$, tale la cardinalità vale

$$\left(2^n - \left\lfloor \frac{2^n}{2} \right\rfloor\right) + \left(\left\lfloor \frac{2^n}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2^n}{8} \right\rfloor\right) + \cdots = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-2)^k = (-1)^n \frac{(-2)^{n+1} - 1}{(-2) - 1} = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

□

Problema 2. Sia P un polinomio a coefficienti reali di grado $2n$ con $n \geq 1$.
Dimostrare che se P ha $2n$ zeri reali e distinti, allora P ha almeno $n + 1$ coefficienti non nulli.

Soluzione. Per il teorema di Rolle, tra due zeri adiacenti di P esiste almeno uno zero della derivata P'. Siccome tutti i $2n$ zeri di P sono reali e distinti, ne segue che il polinomio P' ha esattamente $2n - 1$ zeri reali e distinti. Ripetendo lo stesso ragionamento, si può concludere che per ogni intero $0 \leq k < 2n$, il polinomio $P^{(k)}$ ha esattamente $2n - k$ zeri reali e distinti.
Sia $P(z) = \sum_{k=0}^{2n} a_k z^k$ con $a_{2n} \neq 0$. Per dimostrare la tesi basta verificare che due coefficienti adiacenti di P non possono essere entrambi nulli. Infatti se $a_k = a_{k+1} = 0$ per qualche $0 \leq k < 2n$, allora

$$P^{(k)}(x) = k! \binom{2n}{k} x^{2n-k} + \cdots + (k+1)! a_{k+1} x + k! a_k$$

e il termine noto e il coefficiente di primo grado di $P^{(k)}$ sono nulli. Quindi $x = 0$ è uno zero di $P^{(k)}$ molteplicità due contro il fatto che tutti i $2n - k$ zeri di $P^{(k)}$ sono di molteplicità uno. □

Problema 3. Dimostrare che per ogni $a, b, c > 0$,

$$\frac{2a}{a^2 + bc} + \frac{2b}{b^2 + ca} + \frac{2c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Soluzione. Notiamo che per la disuguaglianza della media aritmetico-geometrica,

$$\frac{a^2 + bc}{2} \geq a\sqrt{bc}, \quad \frac{b^2 + ca}{2} \geq b\sqrt{ca}, \quad \frac{c^2 + ab}{2} \geq c\sqrt{ab}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{bc}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{ca}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Da cui

$$\frac{2a}{a^2 + bc} + \frac{2b}{b^2 + ca} + \frac{2c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

□

Problema 4. Siano $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0,1]$ tale che $\sum_{k=1}^n a_k = 1$.
Dimostrare che esiste una permutazione σ di $\{1,2,\dots,n\}$ tale che

$$S_\sigma := a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)} + a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)} + \cdots + a_{\sigma(n-1)}a_{\sigma(n)} + a_{\sigma(n)}a_{\sigma(1)} \leq \frac{1}{n}.$$

Soluzione. Nella somma di tutti i numeri S_σ al variare delle $n!$ permutazioni σ di $\{1,2,\dots,n\}$, il prodotto $a_i a_j$ con $1 \leq i < j \leq n$ compare $2n(n-2)!$ volte. Il numero $2n(n-2)!$ corrisponde al numero di permutazioni σ dove i e j sono adiacenti: 2 per l'ordine in cui compaiono i e j in σ, n per la scelta dell'indice k tale che $\sigma(k) = i$ e $(n-2)!$ per i modi per completare σ dopo aver scelto la posizione di i e j. Quindi la media di tali somme vale

$$\mu := \frac{1}{n!}\sum_\sigma S_\sigma = \frac{1}{n!}\sum_{1\leq i<j\leq n}(2n(n-2)!)a_i a_j = \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

Ora per la convessità della funzione $x \to x^2$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)^2.$$

Così

$$\mu \leq \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \frac{1}{n},$$

e se la media $\mu \leq 1/n$ allora necessariamente esiste una permutazione σ tale che $S_\sigma \leq 1/n$. $\square$
