Laboratorio di Matematica

Foglio n.2 - 6 marzo 2012

Problema 1. Una famiglia finita di quadrati ha area complessiva uguale a 1/2. Tali quadrati possono essere disposti senza sovrapposizioni in un quadrato di lato 1?

Soluzione. La risposta è affermativa. Supponiamo che i quadrati siano N e che i loro lati siano $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_N > 0$. Posizioniamo i quadrati nel quadrato di lato 1, cominciando con quello di lato x_1 nell'angolo in basso a sinistra e affiancando gli altri in ordine lungo il lato inferiore fino a che è possibile. In questo modo avremo che

$$1 - x_{n_1+1} < x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_1} \leq 1$$

per un certo numero positivo n_1. Tracciamo una linea prolungando il lato superiore del quadrato di lato x_1 e lungo tale linea ricomiciamo a posizionare i quadrati con lo stesso criterio da quello di lato x_{n_1+1} fino a diciamo x_{n_2}. Così

$$1 - x_{n_2+1} < x_{n_1+1} + x_{n_1+2} + \cdots + x_{n_2} \leq 1.$$

Continuando allo stesso modo, gli n quadrati verranno esauriti in diciamo r righe e alla riga k-sima si ha che (si consideri che $n_0 = 0$)

$$1 - x_{n_k+1} < x_{n_{k-1}+1} + x_{n_{k-1}+2} + \cdots + x_{n_k} \leq 1$$

da cui

$$x_{n_k+1}(1-x_1) \leq x_{n_k+1}(1-x_{n_{k-1}+1}) < x_{n_k+1}(x_{n_{k-1}+2}+\cdots+x_{n_k}+x_{n_k+1}) \leq x^2_{n_{k-1}+2}+\cdots+x^2_{n_k}+x^2_{n_k+1}.$$

Sommando tali disuguaglianze membro a membro per $k = 1, \ldots, r-1$ otteniamo

$$(x_{n_1+1} + x_{n_2+1} + \cdots + x_{n_{r-1}+1})(1 - x_1) \leq \sum_{i=2}^{N} x_i^2 = \frac{1}{2} - x_1^2.$$

Ora i quadrati così disposti senza sovrapposizioni stanno nel quadrato di lato 1 se e solo se

$$x_1 + x_{n_1+1} + x_{n_2+1} + \cdots + x_{n_{r-1}+1} \leq 1$$

e quindi basta verificare che

$$\frac{1}{2} - x_1^2 \leq (1 - x_1)^2 = 1 - 2x_1 + x_1^2$$

ossia $1 \geq 4x_1(1 - x_1)$ che vale per $x_1 \in [0, 1]$ (si noti che per ipotesi $0 < x_1^2 \leq 1/2$). $\square$

Problema 2. Dimostrare o confutare che esiste una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$f(f(f(n))) = n^3.$$

Soluzione. Tale funzione esiste. Disponiamo i numeri primi in ordine crescente nominandoli nel seguente modo:

$$r_1 \leq s_1 \leq t_1 \leq r_2 \leq s_2 \leq t_2 \leq \cdots .$$

Definiamo una funzione completamente moltiplicativa ponendo $f(0) := 0$ e $f(1) := 1$ e per $n > 1$

$$f(n) = f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}) := f(p_1)^{a_1} f(p_2)^{a_2} \cdots f(p_m)^{a_m}$$

dove $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$ è la fattorizzazione di n. Se n è un numero primo invece poniamo

$$f(r_i) = s_i \ , \quad f(s_i) = t_i \ , \quad f(t_i) = r_i^3$$

per ogni intero positivo i. Allora

$$\begin{aligned} f(f(f(r_i))) &= f(f(s_i)) = f(t_i) = r_i^3, \\ f(f(f(s_i))) &= f(f(t_i)) = f(r_i^3) = f(r_i)^3 = s_i^3, \\ f(f(f(t_i))) &= f(f(r_i^3)) = f(f(r_i))^3 = f(s_i)^3 = t_i^3. \end{aligned}$$

Da cui

$$f(f(f(n))) = f(f(f(p_1)))^{a_1} f(f(f(p_2)))^{a_2} \cdots f(f(f(p_m)))^{a_m} = n^3.$$

□

Problema 3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\{S_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottospazi vettoriali propri di V. Dimostrare che se

$$V = \bigcup_{i \in I} S_i$$

allora I è un insieme infinito.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che I sia finito. A meno di togliere qualche sottospazio S_i possiamo anche supporre che $r = |I| \geq 2$ sia minimale e quindi per ogni $i = 1, \ldots, r$ si abbia che $S_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} S_j$. Siano

$$v_1 \in S_1 \setminus \bigcup_{j \neq 1} S_j \quad \text{and} \quad v_2 \in S_2 \setminus \bigcup_{j \neq 2} S_j.$$

Dato che $\alpha v_1 \in S_1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ allora gli infiniti vettori

$$w_\alpha = \alpha v_1 + v_2 \notin S_1$$

altrimenti $v_2 = w_\alpha - \alpha v_1 \in S_1$. Quindi $w_\alpha \in \bigcup_{j \neq 1} S_j$ e dunque esiste $j_0 \in \{2, 3, \ldots, r\}$ tale che $w_\alpha \in S_{j_0}$ per infiniti valori di α. Siano α, α' due di questi valori. Allora

$$(\alpha v_1 + v_2) - (\alpha' v_1 + v_2) = (\alpha - \alpha') v_1 \in S_{j_0}$$

quindi $v_1 \in S_{j_0}$ che contraddice il fatto che $v_1 \in S_1 \setminus \bigcup_{j \neq 1} S_j$.

Si osservi che è essenziale che V sia uno spazio vettoriale su un campo infinito. Ad esempio su $\mathbb{Z}_2$

$$V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

dove $V = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$, $S_1 = \{(0,0), (1,0)\}$, $S_2 = \{(0,0), (0,1)\}$,$S_3 = \{(0,0), (1,1)\}$.
□

Problema 4. Per ogni intero $n > 1$ dire se esiste un gruppo G di cardinalità n tale che ogni suo elemento $g \neq e$ commuta solo con e, g, g^{-1}.

Soluzione. Per ipotesi, per ogni elemento $g \neq e$, il centralizzante $C(g)$ può contenere 2 (se $g = g^{-1}$) o 3 (se $g \neq g^{-1}$) elementi. Dato che per la proprietà associativa g commuta con le sue potenze, si ha che l'ordine di ogni $g \neq e$ è uguale a 2 o a 3. Per l'equazione delle classi di G

$$|G| = \sum_g \frac{|G|}{|C(g)|}$$

dove la somma è estesa agli elementi g di G, uno per ogni classe di coniugio. Nel nostro caso, visto che $C(e) = G$, abbiamo che

$$n = 1 + a\,\frac{n}{2} + b\,\frac{n}{3}$$

dove $|G| = n$ e a, b sono numeri interi. Quindi $n(6 - 3a - 2b) = 6$ da cui otteniamo che $n > 1$ è un divisore di 6 ossia $n \in \{2, 3, 6\}$. Si può facilmente verificare che per ognuno di questi valori esiste un gruppo con la suddetta proprietà:

$$\mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_3, \quad S_3 = \{e, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}.$$

□

Problema 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica tale che per ogni intero positivo n

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|f(k)|}{k} \leq 1.$$

Dimostrare che esiste un numero reale x_0 tale che

$$f(x_0) = f(x_0 + 1) = 0.$$

Soluzione. Sia T il periodo di f. Dato che $|f|$ è continua allora posto $M = \max_{[0,T]} |f(x)|$, per la periodicità, si ha che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Consideriamo la funzione continua e periodica $g(x) = |f(x)| + |f(x+1)| \geq 0$. Dobbiamo dimostrare che esiste x_0 tale che $g(x_0) = 0$. Supponiamo per assurdo che $g(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sia $m = \min_{[0,T]} |g(x)| > 0$, allora dato che $g(x) = g(x+T)$ abbiamo che $g(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned} m \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(k)|}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(k+1)|}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} |f(k+1)| \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right), \\ &\leq 1 + 1 + M \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 2 + M \left(1 - \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Facendo tendere $n \to +\infty$ otteniamo una contraddizione: il membro a sinistra tende a $+\infty$ perché la serie armonica diverge mentre il membro a destra tende al valore finito $2 + M$. □
