Laboratorio di Matematica

Foglio n.1 - 8 novembre 2011

Problema 1. Sia n un numero intero positivo. In quanti modi è possibile esprimere n come somma di almeno due interi dispari consecutivi? Ad esempio, se $n = 48$ tali rappresentazioni sono 3:

$$48 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 9 + 11 + 13 + 15 = 23 + 25.$$

Problema 2. Per ogni intero non negativo d, dimostrare o confutare che nel piano $\mathbb{R}^2$ esiste una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio positivo tale che la cardinalità dell'insieme $\mathcal{C} \cap \mathbb{Q}^2$ è esattamente uguale a d.

Problema 3. Quante sono le funzioni $f : \{1, 2, 3, \ldots, 2011\} \to \{1, 2, 3\}$ tali che la cardinalità delle controimmagini $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ e $f^{-1}(3)$ siano tutte dispari?

Problema 4. Sia $P \in \mathbb{Z}[x]$ e sia a un numero intero tale che $P(a^2 P(a)) = 0$. Dimostrare che P ha almeno una radice nell'insieme $\{-2, 0, 2\}$.

Problema 5. Sia $f \in C^1([0,1])$ tale che $f(0) = f(1) = 0$ e $f(x) \not\equiv 0$ allora

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leq \frac{-mM}{2(M-m)}$$

dove

$$m = \min_{x \in [0,1]} f'(x) \qquad \text{e} \qquad M = \max_{x \in [0,1]} f'(x).$$
