Secondo appello di Laboratorio di Matematica

26 giugno 2012

Problema 1. Determinare per quali primi p il numero

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}$$

è un quadrato perfetto.

Soluzione. Per $p \leq 7$ il rapporto dato è un quadrato perfetto se e solo se $p = 3, 7$. Dimostriamo che non ci sono altri primi che godono di questa proprietà. Supponiamo che $p \geq 11$ allora $(p-1)/2$ è un numero intero e dobbiamo determinare x intero tale che

$$(2^{\frac{p-1}{2}}-1)(2^{\frac{p-1}{2}}+1) = px^2.$$

Dato che $(2^{\frac{p-1}{2}}-1)$ e $(2^{\frac{p-1}{2}}+1)$ sono primi tra loro allora, se l'equazione vale, uno di questi due fattori deve essere un quadrato perfetto.
1) Se $2^{\frac{p-1}{2}}-1 = y^2$ allora y è dispari, $y = 2k+1$, e

$$2(2^{\frac{p-3}{2}}-1) = 2^{\frac{p-1}{2}}-2 = y^2-1 = (y-1)(y+1) = 4k(k+1)$$

ma 4 divide $4k(k+1)$ mentre 4 non divide $2(2^{\frac{p-3}{2}}-1)$.
2) Se $2^{\frac{p-1}{2}}+1 = y^2$ allora y è dispari, $y = 2k+1 \geq 5$, e

$$2^{\frac{p-1}{2}} = y^2-1 = 4k(k+1)$$

ma $2^{\frac{p-1}{2}}$ è una potenza di 2 mentre $4k(k+1)$ contiene un fattore dispari maggiore di 1. $\square$

Problema 2. Sia $R(n)$ il numero di modi possibili di ricoprire una quadrato $2^n \times 2^n$ con 2^{2n-1} rettangoli 1×2 o 2×1. Calcolare quanto vale il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log(R(n)))}{n}.$$

Soluzione. Dato che un quadrato 2×2 può essere ricoperto in due modi, se suddividiamo il quadrato $2^n \times 2^n$ in 4^{n-1} quadrati 2×2 abbiamo che

$$R(n) \geq 2^{4^{n-1}}.$$

Inoltre, ogni quadrato 1×1 nel quadrato $2^n \times 2^n$ può essere coperto in al più 2 modi da un rettangolo 1×2 e al più 2 modi da un rettangolo 2×1. Ne segue che

$$R(n) \leq 4^{4^n}.$$

Quindi

$$(n-1)\log 4 + \log(\log 2) = \log(\log(2^{4^{n-1}})) \leq \log(\log(R(n)) \leq \log(\log(4^{4^n})) = n\log 4 + \log(\log 4)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log(R(n)))}{n} = \log 4.$$

$\square$

Problema 3. In un insieme S è definita un'operazione binaria associativa tale che

$$x \star y = y \star x^{2012} \qquad \forall x, y \in S.$$

Possiamo concludere che tale operazione è commutativa?

Soluzione. Sia $n = 2012$ e poniamo inizialmente $y = x^{n-1}$. Allora

$$\begin{aligned} x^n &= x \star x^{n-1} = x^{n-1} \star x^n = x^{2n-1} \\ &= x \star x^{2n-2} = x^{2n-2} \star x^n = x^{3n-2} \\ &= \cdots = x^{(a+1)n-a} \end{aligned}$$

dove a è un numero intero positivo. In particolare per $a = n$ si ha che $x^n = x^{n^2} = (x^n)^n$.
Siano $x, y \in S$, allora

$$x \star y = y \star x^n = x^n \star y^n = y^n \star (x^n)^n = y^n \star x^n = x \star y^n = y \star x.$$

$\square$

Problema 4. Dimostrare o confutare che esiste una $f \in C(\mathbb{R})$ che verifica entrambe le seguenti proprietà

1) se $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) \in \mathbb{Q}$ allora $f(x+1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

2) se $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ allora $f(x-1) \in \mathbb{Q}$.

Soluzione. Le funzioni $g_\pm(x) := f(x) \pm f(x+1)$ sono continue in $\mathbb{R}$. Inoltre, dato che la somma/sottrazione di un numero razionale e un numero irrazionale è irrazionale, le due proprietà implicano che $g_\pm(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per la continuità segue che le funzioni $g_\pm$ sono identicamente costanti

$$g_\pm(x) \equiv c_\pm \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Così

$$f(x) \equiv \frac{c_+ + c_-}{2} \qquad \text{e} \qquad f(x+1) \equiv \frac{c_+ - c_-}{2}$$

e quindi $c_+ + c_- = c_+ - c_-$ ossia $c_+ = c_- = 0$ contraddicendo il fatto che $c_\pm$ sono irrazionali. $\square$
