

## Secondo appello di Laboratorio di Matematica

26 giugno 2012

---

**Problema 1.** Determinare per quali primi  $p$  il numero

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p}$$

è un quadrato perfetto.

---

**Problema 2.** Sia  $R(n)$  il numero di modi possibili di ricoprire una quadrato  $2^n \times 2^n$  con  $2^{2n-1}$  rettangoli  $1 \times 2$  o  $2 \times 1$ . Calcolare quanto vale il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\log(R(n)))}{n}.$$

---

**Problema 3.** In un insieme  $S$  è definita un'operazione binaria associativa tale che

$$x \star y = y \star x^{2012} \quad \forall x, y \in S.$$

Possiamo concludere che tale operazione è commutativa?

---

**Problema 4.** Dimostrare o confutare che esiste una  $f \in C(\mathbb{R})$  che verifica entrambe le seguenti proprietà

- 1) se  $x \in \mathbb{R}$  e  $f(x) \in \mathbb{Q}$  allora  $f(x+1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;
  - 2) se  $x \in \mathbb{R}$  e  $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  allora  $f(x-1) \in \mathbb{Q}$ .
-