

## Primo appello di Laboratorio di Matematica

12 giugno 2012

---

**Problema 1.** Per quali interi  $n \geq 2$  esistono delle matrici  $n \times n$  a coefficienti reali  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ , ciascuna di rango  $n - 1$  tali che

$$\prod_{k=1}^{n-1} A_k = \mathbf{0}_n$$

dove  $\mathbf{0}_n$  è la matrice nulla  $n \times n$ ?

---

**Problema 2.** Sia  $f \in C^1([0, 1])$  tale che

$$\int_0^1 f(x) dx = -1 \quad \text{e} \quad \int_0^1 xf(x) dx = 1.$$

Dimostrare che esiste  $t \in (0, 1)$  tale che  $f'(t) = 18$ .

---

**Problema 3.** Siano  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  dei numeri interi positivi. Dimostrare che

$$1 + \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) \leq 2 \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k + 1}\right).$$

---

**Problema 4.** Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\text{lcm}(1, 2, \dots, n)}$$

converge ad un numero irrazionale positivo minore di 1.

---