Laboratorio di Matematica

Foglio n.3 - 14 gennaio 2011

Problema 1. Se si scelgono a caso n punti in un intervallo di lunghezza L, qual è il valore medio della somma delle distanze di tutte le possibili coppie di punti?

Soluzione.
Supponendo che i punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano uniformemente distribuiti (ossia la probabilità che x_i stia in un intervallo $[a,b] \subset [0,L]$ è $(b-a)/L$), allora il valor medio cercato è uguale a

$$\begin{aligned}
\overline{S}_n &= \frac{1}{L^n} \int_{[0,L]^n} \sum_{1 \le i < j \le n} |x_i - x_j| \, dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \frac{1}{L^n} \sum_{1 \le i < j \le n} \int_{[0,L]^n} |x_i - x_j| \, dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \frac{1}{L^2} \sum_{1 \le i < j \le n} \int_{[0,L]^2} |x_i - x_j| \, dx_i dx_j \\
&= \frac{1}{L^2} \binom{n}{2} \int_{[0,L]^2} |x_1 - x_2| \, dx_1 dx_2 \\
&= \frac{2}{L^2} \binom{n}{2} \int_{x_1=0}^{L} \left(\int_{x_2=0}^{x_1} (x_1 - x_2) \, dx_2 \right) dx_1 \\
&= \frac{n(n-1)}{L^2} \int_{x_1=0}^{L} \frac{x_1^2}{2} \, dx_1 = \frac{n(n-1)L}{6}.
\end{aligned}$$

□

Problema 2. Sia $f \in C^1([a,b])$. Dimostrare che esistono due punti $a < x_1 < x_2 < b$ tali che

$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)^2.$$

Soluzione.
Consideriamo la funzione ausiliaria $g \in C^1([0,1])$ definita come

$$g(t) = \frac{f(a + (b-a)t) - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Allora $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$ e la tesi si traduce nel trovare $0 < t_1 < t_2 < 1$ tali che

$$g'(t_1) \cdot g'(t_2) = 1.$$

Infatti posto $x_i = a + (b-a)t_i$ per $i = 1, 2$ si ha che

$$g'(t_i) = \frac{(b-a) f'(x_i)}{f(b) - f(a)}$$

e dunque

$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = g'(t_1) \cdot g'(t_2) \cdot \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)^2 = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)^2.$$

Dimostriamo ora l'esistenza di t_1 e t_2. Se $g(x) = x$ allora la tesi è banale, altrimenti esiste un punto $c \in (0,1)$ tale che $g(c) > c$ oppure $g(c) < c$. Esaminiamo solo il primo caso in quanto l'altro è simile. Per il Teorema dei Valori Intermedi applicato alla funzione continua g, esistono $0 < c_1 < c < c_2 < 1$ tali che

$$g'(c_1) = \frac{g(c) - g(0)}{c - 0} = \frac{g(c)}{c} > 1, \qquad \text{e} \qquad g'(c_2) = \frac{g(1) - g(c)}{1 - c} = \frac{1 - g(c)}{1 - c} < 1.$$

Quindi esiste un numero reale y tale che $g'(c_2) < y < 1 < 1/y < g'(c_1)$ e ancora per il Teorema dei Valori Intermedi questa volta applicato alla funzione continua g' abbiamo che esistono $t_1, t_2 \in (c_1, c_2)$ tali che $g'(t_1) = y$ e $g'(t_2) = 1/y$. Dunque $t_1 \neq t_2$ e $g'(t_1) \cdot g'(t_2) = 1$.
È interessante notare che per il teorema di Darboux la funzione derivata ha sempre la proprietà dei valori intermedi (anche se la derivata non è continua). Quindi la tesi del problema vale anche senza richiedere l'ipotesi che la derivata di f sia continua. □

Problema 3. Determinare una formula chiusa per la somma multipla

$$\sum_{\substack{A\subset\{1,\dots,n\}\\ A\neq\emptyset}} \sum_{\substack{B\subset\{1,\dots,n\}\\ B\neq\emptyset}} \sum_{x\in A\cup B} x.$$

Soluzione.
Se $x \in \{1, \dots, n\}$ allora ci sono 2^{n-1} sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ che contengono l'elemento x e quindi

$$\begin{aligned} g(n) := \sum_{\substack{A\subset\{1,\dots,n\}\\ A\neq\emptyset}} \sum_{x\in A} x &= \sum_{x\in\{1,\dots,n\}} x \sum_{\substack{A\subset\{1,\dots,n\}\\ A\neq\emptyset}} [x \in A] \\ &= 2^{n-1} \sum_{x\in\{1,\dots,n\}} x = 2^{n-1}\binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

dove $[P]$ vale 1 se P è vera e 0 altrimenti.
In modo simile, per ogni $x \in \{1, \dots, n\}$ ci sono $3 \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-1}$ coppie di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ la cui unione contiene x (il fattore 3 è dovuto al fatto che x potrebbe stare in $A \setminus B$, $A \cap B$ oppure $B \setminus A$). Dunque

$$\begin{aligned} f(n) := \sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} \sum_{B\subset\{1,\dots,n\}} \sum_{x\in A\cup B} x &= \sum_{x\in\{1,\dots,n\}} x \sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} \sum_{B\subset\{1,\dots,n\}} [x \in A\cup B] \\ &= 3 \cdot 4^{n-1} \sum_{x\in\{1,\dots,n\}} x = 3 \cdot 4^{n-1}\binom{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{A\subset\{1,\dots,n\}\\ A\neq\emptyset}} \sum_{\substack{B\subset\{1,\dots,n\}\\ B\neq\emptyset}} \sum_{x\in A\cup B} x &= f(n) - \sum_{\substack{A\subset\{1,\dots,n\}\\ A\neq\emptyset}} \sum_{B=\emptyset} \sum_{x\in A\cup B} x - \sum_{A=\emptyset} \sum_{\substack{B\subset\{1,\dots,n\}\\ B\neq\emptyset}} \sum_{x\in A\cup B} x \\ &= f(n) - 2g(n) = \left(3 \cdot 4^{n-1} - 2^n\right)\binom{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Un ragionamento più sintetico è il seguente. Per motivi di simmetria il numero di volte che un certo numero $x \in \{1, \dots, n\}$ compare nella sommatoria data è indipendente da x. Sia $a(n)$ questo numero. Inoltre $a(n)$ è uguale al totale delle coppie di insiemi non vuoti, $(2^n - 1)^2$, meno il numero delle coppie di insiemi non vuoti che non contengono x, ossia $(2^{n-1} - 1)^2$.

Quindi la formula cercata è

$$a(n) \sum_{x\in\{1,\dots,n\}} x = ((2^n - 1)^2 - (2^{n-1} - 1)^2)\binom{n+1}{2} = \left(3 \cdot 4^{n-1} - 2^n\right)\binom{n+1}{2}.$$

□

Problema 4. Sia $n = 2010^{100}$. Determinare il numero di elementi dell'insieme

$$S_n = \left\{ d \in \mathbb{N} \,:\, 1 \leq d \leq n,\, d \mid n^2,\, d \nmid n \right\}.$$

Soluzione.
Abbiamo che $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Quindi se $n = 2010^t$ allora il numero di divisori di n^2 è $(2t+1)^4$. Si osservi che per ogni divisore $x < n$ di n^2 esiste un altro divisore $y = n^2/x > n$. Dunque il numero di divisori di n^2 che sono minori di n è $((2t+1)^4 - 1)/2$ (la sottrazione di 1 è dovuta al fatto che non si considera il divisore n). Tra questi ci sono i $(t+1)^4 - 1$ divisori propri di n e qundi la cardinalità di S_n è uguale a

$$|S_n| = \frac{(2t+1)^4 - 1}{2} - ((t+1)^4 - 1) = 7t^4 + 12t^3 + 6t^2.$$

Ne segue che $S_{100} = 712060000$. □

Problema 5. Sia p un numero primo. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 0$ si ha che

$$L_{pn} \equiv L_n \pmod{p}$$

dove L_n è l'n-simo numero di Lucas definito dalla ricorsione

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1 \text{ e } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ per } n \geq 2.$$

Soluzione.
Se $p = 2$ allora $L_2 = 3 \equiv 1 = L_1 \pmod{2}$. Supponiamo ora che p sia un primo dispari. Dato che p divide $\binom{p}{k}$ per $k = 1, \ldots, p-1$, per il Teorema di Eulero-Fermat

$$L_p = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{\substack{0 \leq k \leq p \\ k \equiv 0 \pmod{2}}} \binom{p}{k} 5^{k/2}$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq p-1 \\ k \equiv 0 \pmod{2}}} \binom{p}{k} 5^{k/2} \equiv 1 = L_1 \pmod{p}.$$

Inoltre, per la ricorrenza $L_{n+m} = L_m L_n - (-1)^m L_{n-m}$, si ha che per ogni primo p

$$L_{(n+1)p} \equiv L_p L_{np} + L_{(n-1)p} \equiv L_{np} + L_{(n-1)p} \pmod{p}.$$

Infine, ponendo $a_n = L_{np} - L_n$, segue che

$$a_0 \equiv 0,\ a_1 \equiv 0, \text{ e } a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \pmod{p} \text{ per } n \geq 1,$$

e dunque $a_n \equiv 0 \pmod{p}$ per ogni $n \geq 0$. □
