Laboratorio di Matematica

Foglio n.2 - 19 novembre 2010

Problema 1. Siano n e k interi tali che $1 \leq k \leq n$. Qual è il numero medio dei cicli di lunghezza k di una permutazione dei numeri $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soluzione. Sia π una permutazione di S_n. Indichiamo con $\mathrm{Cyc}_k(\pi)$ l'insieme costituito dai numeri $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ che appartengono a un ciclo di lunghezza k di π.
Il numero medio $\mu_n(k)$ dei cicli di lunghezza k di una permutazione di S_n è dato da

$$\mu_n(k) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \frac{|\mathrm{Cyc}_k(\pi)|}{k} = \frac{1}{k\, n!} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{k=1}^{n} [i \in \mathrm{Cyc}_k(\pi)] = \frac{1}{k\, n!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\pi \in S_n} [i \in \mathrm{Cyc}_k(\pi)]$$

dove $[Q]$ vale 1 se la proposizione Q è vera e 0 altrimenti. La somma

$$\sum_{\pi \in S_n} [i \in \mathrm{Cyc}_k(\pi)]$$

enumera il numero di permutazioni che hanno il numero i contenuto in un ciclo di lunghezza k ed è uguale al prodotto di $\binom{n-1}{k-1} \cdot (k-1)!$ (numero di modi di completare il ciclo) per $(n-k)!$ (numero di modi di completare la permutazione), ossia $(n-1)!$. Così

$$\mu_n(k) = \frac{1}{k\, n!} \sum_{k=1}^{n} (n-1)! = \frac{1}{k}.$$

$\square$

Problema 2. Per $a > 1$, si consideri la serie

$$S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n!}},$$

(i) dimostrare che $S(a)$ è irrazionale per ogni intero $a > 1$;

(ii) esiste un numero reale $a > 1$ tale che $S(a)$ è razionale?

Soluzione.
(i) Il numero $S(a)$, espresso in base a, ha un sviluppo infinito costituito da cifre 0 e 1 dove la distanza tra l'n-simo 1 e il precedente è uguale a $n! - (n-1)!$. Dato che tale distanza diventa arbitrariamente grande, lo sviluppo non è periodico e quindi $S(a)$ non è razionale.
Una dimostrazione più diretta è la seguente.
Supponiamo per assurdo che $S(a) = p/q$ con p e q interi positivi. Allora per ogni $n_0 \geq 1$

$$t := q \cdot a^{n_0!} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{a^{n!}} = p \cdot a^{n_0!} - q \cdot a^{n_0!} \sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{a^{n!}} = \text{intero positivo} \geq 1.$$

D'altra parte, siccome $n! - n_0! \geq n - n_0$, si ha che per n_0 sufficientemente grande

$$t = \frac{q}{a^{n_0 \cdot n_0!}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{a^{n! - n_0!}} \leq \frac{q}{a^{n_0 \cdot n_0!}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{a^{n-n_0}} = \frac{q}{(a-1)a^{n_0 \cdot n_0!}} < 1$$

in contraddizione con la disequazione precedente.
(ii) La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!},$$

dominata dalla serie geometrica di ragione x, converge per $|x| < 1$ a una funzione continua $F(x)$. Per il Teorema dei Valori Intermedi, per $a > 1$, $S(a) = F(1/a)$ assume tutti i valori nell'intervallo $(F(0), F(1)) = (0, +\infty)$. In particolare esistono infiniti valori di $a > 1$ per cui $S(a)$ è razionale. $\square$

Problema 3. Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$. Provare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x)|^2 \, dx \geq \frac{12}{|b-a|^3} \cdot \left(f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)^2$$

per ogni scelta dei numeri reali distinti a e b.

Soluzione.
Possiamo supporre che $a < b$. Sia $g \in C^2(\mathbb{R})$ allora per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\int_a^b |f''(x)|^2 \, dx \int_a^b |g(x)|^2 \, dx \geq \left(\int_a^b f''(x) g(x) \, dx \right)^2.$$

Sia $c = (a+b)/2$ e posto

$$g(x) = \begin{cases} x - a & \text{per } x \in [a, c] \\ b - x & \text{per } x \in [c, b] \end{cases},$$

si ha che

$$\int_a^b |g(x)|^2 \, dx = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \int_a^b f''(x) g(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, d(f'(x)) &= [g(x) f'(x)]_a^b - \int_a^c f'(x) g'(x) \, dx - \int_c^b f'(x) g'(x) \, dx \\ &= 0 - f(c) + f(a) + f(b) - f(c) = f(a) - 2f(c) + f(b). \end{aligned}$$

Infine,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x)|^2 \, dx \geq \int_a^b |f''(x)|^2 \, dx \geq \frac{12}{|b-a|^3} \cdot (f(a) - 2f(c) + f(b))^2.$$

□

Problema 4. Dati tre numeri interi distinti a, b e c dimostrare o confutare che esiste un polinomio $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ che permuta ciclicamente tali numeri ossia che:

$$P(a) = b, \quad P(b) = c \quad \text{e} \quad P(c) = a.$$

Soluzione. Se $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e $P(a) = b$ allora esiste un polinomio $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tale che

$$P(x) - b = (x - a) Q(x).$$

Quindi

$$m_1 := \frac{c-b}{b-a} = \left. \frac{P(x) - b}{x - a} \right|_{x=b} = Q(b) \in \mathbb{Z}.$$

In modo simile si ottiene che

$$m_2 := \frac{a-c}{c-b} \in \mathbb{Z} \qquad \text{e} \qquad m_3 := \frac{b-a}{a-c} \in \mathbb{Z}.$$

Dato che $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 1$ se ne deduce che $|m_1| = |m_2| = |m_3| = 1$. Così $|c-b| = |b-a| = |a-c| > 0$ ovvero a, b, c sono tre punti distinti di una retta ognuno equidistante dagli altri due. Tale condizione non può mai essere soddisfatta e dunque abbiamo una contraddizione. □

Problema 5. Sia $\pi(n)$ la funzione che per ogni intero $n \geq 1$ indica il numero di primi nell'intervallo $[1, n]$. Esistono infiniti numeri interi $n \geq 2$ tali che $\pi(n)$ divide n?

Soluzione.
Sia $a \geq 2$ un intero e consideriamo l'insieme

$$S_a = \{k \geq 1 \ : \ \pi(a \cdot k) \geq k\}.$$

L'insieme S_a non è vuoto perché $1 \in S_a$. Inoltre, siccome $\pi(n) \approx n/\log n$, si ha che

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\pi(a \cdot k)}{a \cdot k} = 0$$

e così, definitivamente, $\pi(a \cdot k)/(a \cdot k) < 1/a$ ossia $\pi(a \cdot k) < k$. Quindi l'insieme S_a è finito. Sia $k_a := \max S_a$, allora $\pi(a \cdot k_a) \geq k_a$. Se $\pi(a \cdot k_a) > k_a$ allora

$$\pi(a \cdot (k_a + 1)) \geq \pi(a \cdot k_a) \geq k_a + 1$$

contro la massimalità di k_a (si noti che la funzione $\pi(n)$ è non decrescente ed è a valori interi). Quindi $\pi(a \cdot k_a) = k_a$ e posto $n_a := a \cdot k_a$, si ha che

$$a \cdot \pi(n_a) = a \cdot \pi(a \cdot k_a) = a \cdot k_a = n_a,$$

ossia $\pi(n_a)$ divide n_a. Dato che $n_a \geq a$, per l'arbitrarietà della scelta di a, possiamo concludere che esistono infiniti n_a. $\square$
