Laboratorio di Matematica

Foglio n.2 - 19 novembre 2010

Problema 1. Siano n e k interi tali che $1 \leq k \leq n$. Qual è il numero medio dei cicli di lunghezza k di una permutazione dei numeri $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Problema 2. Per $a > 1$, si consideri la serie

$$S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n!}},$$

(i) dimostrare che $S(a)$ è irrazionale per ogni intero $a > 1$;

(ii) esiste un numero reale $a > 1$ tale che $S(a)$ è razionale?

Problema 3. Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$. Provare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x)|^2 \, dx \geq \frac{12}{|b-a|^3} \cdot \left(f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)^2$$

per ogni scelta dei numeri reali distinti a e b.

Problema 4. Dati tre numeri interi distinti a, b e c dimostrare o confutare che esiste un polinomio $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ che permuta ciclicamente tali numeri ossia che:

$$P(a) = b, \quad P(b) = c \quad \text{e} \quad P(c) = a.$$

Problema 5. Sia $\pi(n)$ la funzione che per ogni intero $n \geq 1$ indica il numero di primi nell'intervallo $[1, n]$. Esistono infiniti numeri interi $n \geq 2$ tali che $\pi(n)$ divide n?
