# Laboratorio di Matematica

Foglio n.1 - 15 ottobre 2010

---

**Problema 1.** Siano $A$ e $B$ matrici $n \times n$ a coefficienti reali. Dimostrare che se $A$ è simmetrica e definita non negativa e $AB + BA = 0$ allora $AB = BA = 0$.

---

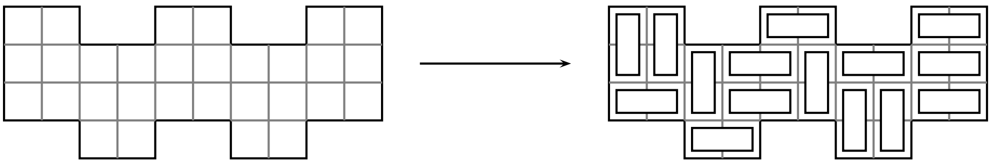
**Problema 2.** Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i vertici di un poligono regolare di $n$ lati inscritto in una la circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio unitario. Dimostrare che per ogni $P \in \mathcal{C}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |PA_k|^2$$

è un numero intero e determinarne il valore.

---

**Problema 3.** Un poligono è formato da $n$ rettangoli $3 \times 2$ uniti lungo una parte del lato lungo e disposti in modo alternato. Tale poligono deve essere ricoperto con tessere rettangolari $2 \times 1$ o $1 \times 2$. Qui sotto è rappresentato un esempio di ricoprimento per $n = 5$:



Sia $a_n$ il numero di tali ricoprimenti. Dimostrare che $3^n \leq a_n < 4^n$ per ogni $n$ intero positivo.

---

**Problema 4.** Sia $x$ un numero reale non negativo. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor 2^n x \rfloor}}{2^n}.$$

---

**Problema 5.** Dimostrare o confutare che per ogni intero positivo $k$ esiste una potenza di due che in base dieci ha almeno $k$ cifre uguali a 9.

---