Primo appello di Laboratorio di Matematica

14 giugno 2011

Problema 1. Dimostrare o confutare che esistono tre numeri interi positivi i, j, k tali che

$$a_i^2 + a_j^2 = a_k^2$$

dove a_n è l'n-simo termine di una successione definita nel modo seguente

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0 \quad \text{e} \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{per } n > 2.$$

Problema 2. Sia n un numero intero positivo. Dimostrare che

i) per ogni primo p si ha che p^a divide $n!$ se e solo se $0 \leq a \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$;

ii) $n!$ divide il numero intero $N = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2^k - 1)$.

Problema 3. Per quali numeri complessi $w \in \mathbb{C}$ esiste un polinomio $P(z)$ non costante, a coefficienti reali non negativi, tale che $P(w) = 0$?

Problema 4. Sia $f \in C^2([0,1])$ tale che $f(0) = f(1) = 0$. Dimostrare che

$$\int_0^1 f''(x)^4 \, dx \geq 2304 \cdot f\left(1/2\right)^4.$$
