1. Sia Q il quadrato in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$$

   (i) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.
   (ii) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda il quadrato in se stesso?
   (iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/4}$.

2. Sia l la retta di equazione $x_1 + x_2 = 0$.
   (i) Calcolare le formule della riflessione rispetto ad l.
   (ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

   (iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

3. Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}$$

   e sia m la retta di equazione $x_1 = 0$.
   (i) Trovare le formule della riflessione S rispetto ad l.
   (ii) Calcolare le formule della riflessione S' rispetto ad m.
   (iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

   (iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

   (v) Geometricamente, che cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?

4. Sia π il piano di equazione $x_1 + 2x_2 = 0$.
   (i) Calcolare le formule della riflessione rispetto a π.
   (ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

5. Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare la formula per la riflessione $U_{\mathbf{p}}$ rispetto al punto $\mathbf{p}$.
   (ii) Calcolare la formula per la riflessione $U_{\mathbf{q}}$ rispetto al punto $\mathbf{q}$.
   (iii) Calcolare le formule per la trasformazione $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$ e per $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$.
   (iv) Geometricamente, che cosa fanno le trasformazioni $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$ e $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$?

6. Per le seguenti matrici decidere se sono invertibili o meno e, in caso, calcolarne la matrice inversa:

   (i)
   $$\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix};$$

   (ii)
   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

   (iii)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

   (iv)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Sia
   $$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$$
   e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la mappa data da $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
   (i) Dimostrare che $f(\mathbf{x}) \in V$ per ogni $\mathbf{x} \in V$.
   Sia $\tilde{f} : V \longrightarrow V$ l'applicazione data da $\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.
   (ii) Trovare una base per V.
   (iii) Calcolare la matrice rappresentativa della applicazione $\tilde{f}$ rispetto a questa base.

8. Sia V uno spazio vettoriale e sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare. Supponiamo che $f^2 = 0$, cioè $f(f(\mathbf{x})) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in V$.
   (i) Dimostrare che $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$.
   (ii) Sia $n = \dim(V)$. Dimostrare che $\dim \ker(f) \geq n/2$.
   (iii) Dare un esempio di un'applicazione $f \neq 0$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ che soddisfa $f^2 = 0$.