1. Siano $V, W \subset \mathbf{R}^4$ due sottospazi dati da

$$V = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

   (i) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
   (ii) Calcolare le dimensioni di V, W e $V \cap W$.
   (iii) Calcolare la dimensione $\dim(V + W)$.

2. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$

   (i) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
   (ii) Completarli ad una base di $\mathbf{R}^3$.
   (iii) Esibire un complemento di $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1\}$ e di $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

3. Siano dati i sottospazi $U = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ e $V = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x - y + z - w = 0\right\}$ di $\mathbf{R}^4$.
   (i) Determinare una base per $U + V$ e una base per $U \cap V$;
   (ii) Determinare se il vettore $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $U \cap V$.

4. Siano $V = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ e $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ sottospazi di $\mathbf{R}^3$.
   (i) Esibire una base di V e una base di W. Calcolare la dimensione di V e di W.
   (ii) Calcolare $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V + W)$.

5. Sia V lo spazio dei polinomi $f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbf{R}[X]$ che hanno le proprietà $\deg(f) \leq 3$, $f(1) = 0$, $a_0 + a_3 = 0$ e $a_1 + a_2 = 0$. Calcolare la dimensione di V come spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e esibire una base di V.

6. Si consideri $\mathbf{R}^3$ col prodotto scalare canonico
   (i) Determinare il complemento ortogonale del sottospazio $V = \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$
   (ii) Determinare la distanza fra i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Sia $V = \mathbf{R}^4$ con il prodotto scalare canonico.

(i) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare la norma di $\mathbf{v}$.

(ii) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolare il coseno dell'angolo formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

(iii) Calcolare la distanza tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

8. Sia $V = \mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare canonico. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.

(ii) "Trasformare" la base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tramite il procedimento di Gram-Schmidt in una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

(iii) Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ nella base ortonormale trovata in (ii).

9. Calcolare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^5$ dal sottospazio

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 \; : \; \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + u = 0 \\ u + v = 0 \end{cases} \right\}.$$

10. Determinare il piano in $\mathbf{R}^3$ contenente la retta $\begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e ortogonale al piano di equazione $x + y + 3z = 1$.

11. Sia dato $\mathbf{R}^4$ col prodotto scalare canonico. Determinare una base del complemento ortogonale $V^\perp$ del sottospazio $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x + y = 0 \\ z + w = 0 \\ 2x + 2y + z + w = 0 \end{cases} \right\}$.

12. Siano $l : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$ e $m : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(s \in \mathbf{R})$ due rette in $\mathbf{R}^3$. Calcolare la distanza fra l ed m.