1. Sia l una retta in $\mathbf{P}^2$ e sia $\varphi : l \longrightarrow l$ una mappa proiettiva. Far vedere
   (i) se φ fissa tre punti distinti, allora $\varphi(P) = P$ per ogni $P \in l$.
   (ii) Dare esempi di mappe proiettive $\varphi : l \longrightarrow l$ che fissano 0,1, oppure 2 punti (basta dare le matrici corrispondenti).

2. Sia l una retta a siano P, Q e R tre punti distiniti su l.
   (i) Far vedere che esiste esattamente una mappa proiettiva φ con $\varphi(Q) = R$ e tale che P è il suo unico punto fisso.
   (ii) Decrivere un procedimento per costruire $\varphi(R)$.

3. Sia l una retta e sia $\varphi : l \longrightarrow l$ una mappa proiettiva. Supponiamo che per un punto $P \in l$ abbiamo che $\varphi(P) \neq P$ mentre $\varphi^2(P) = P$. Dimostrare che φ è una *involuzione*, cioè che $\varphi^2(Q) = Q$ per ogni $Q \in l$.

4. Sia l una retta in $\mathbf{P}^2$. Far vedere che nessuna involuzione $\varphi : l \longrightarrow l$ ha esattamente 1 punto fisso.

5. Sia l una retta e sia $\varphi : l \longrightarrow l$ una mappa proiettiva. Siano dati: un punto P fisso di φ e punti A, A', B e B' tali che $\varphi(A) = A'$ e $\varphi(B) = B'$. Costruire Q il secondo punto fisso di φ.

6. Siano P e Q due punti distinti su una retta l. Dimostrare che ogni due involuzioni φ_1, φ_2 di l che fissano P e Q, soddisfano $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$.

7. Sia A una matrice 3 per 3 invertibile.
   (i) Far vedere che A induce una mappa biettiva $\mathbf{P}^2 \longrightarrow \mathbf{P}^2$ che porta rette in rette.
   (ii) Supponiamo che il nucleo di A abbia dimensione 1. Sia $P \in \mathbf{P}^2$ il punto corrispondente al nucleo e sia l la retta in $\mathbf{P}^2$ che corrisponde all'imagine di A. Far vedere che A induce una mappa $\varphi : \mathbf{P}^2 - \{P\} \longrightarrow l$. Far vedere che per ogni $Q \in \mathbf{P}^2 - \{P\}$, l'immagine della retta PQ è un punto su l.
   (iii) Dimostrare che la proiezione dal punto P sulla retta l è un esempio di una mappa con la proprietà della parte (ii).
   (iv) Supponiamo che il nucleo di A abbia dimensione 2. Sia l la retta in $\mathbf{P}^2$ che corrisponde al nucleo di A. Descrivere la mappa che A induce su $\mathbf{P}^2 - \{l\}$.

8. *(Collineazioni centrali)* Sia $\psi : \mathbf{P}^2 \longrightarrow \mathbf{P}^2$ una mappa proiettiva. Supponiamo che esista un punto $C \in \mathbf{P}^2$ tale che ψ preserva ogni retta che passa per C. Dimostrare che esiste una retta $l \subset \mathbf{P}^2$ tale che $\psi(P) = P$ per ogni $P \in l$. Dare esempi di un tale mappa ψ con $C \in l$ e con $C \notin l$ (dare le matrici corrispondenti).

9. Sia l una retta e siano A e B due punti distinti su l. Far vedere che la mappa che manda $P \in l$ nell'unico punto $Q \in l$ tale che $(ABPQ) = -1$ è una mappa proiettiva. (Sugg. Siano n e m due rette che passano per A e sia r una retta che passa per B. Sia $U = n \cap r$ e sia $V = m \cap r$. Dato P, sia P' l'intersezione $PU \cap m$ e sia P'' l'intersezione $P'B \cap n$. Adesso prendere $Q = l \cap P''V$.)