

1. (i) Siano $(1 : 2 : 3)$, $(1 : 0 : -1)$ e $(2 : 1 : 0)$ tre punti in \mathbf{P}^2 . Decidere se stanno su una retta o meno.
 (ii) Siano $2x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$, $-x_0 + 2x_1 - x_2 = 0$ e $x_1 = 0$ tre rette in \mathbf{P}^2 . Decidere se passano per un punto.
2. Sia r la retta passante per $P = (1 : 0 : -1)$ e $Q = (2 : 1 : 0)$.
 (i) Far vedere che $R = (-1 : -1 : -1)$ sta su r .
 (ii) Determinare $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che $R = \lambda P + \mu Q$.
 (iii) Determinare $\lambda', \mu' \in \mathbf{R}$ tali che $Q = \lambda' P + \mu' R$.
3. Sia l la retta passante per i punti $(0 : 1 : -1)$ e $(2 : 1 : 0)$ e sia m la retta passante per i punti $(0 : -1 : 1)$ e $(2 : 1 : 0)$. Determinare $l \cap m$.
4. Sia l la retta di equazione $x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$ in \mathbf{P}^2 . Trovare tre punti P, Q e R su l e determinare $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che $R = \lambda P + \mu Q$.
5. Siano l e l' le due rette di equazioni $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ e $2x_0 - x_1 - x_2 = 0$. Trovare il punto di intersezione P . Trovare altre due rette del fascio delle rette passanti per P .
6. Siano $P = (2 : -1 : 0)$ e $Q = (1 : 3 : 0)$ due punti in \mathbf{P}^2 e sia m la retta di equazione $x_1 - 3x_2 = 0$. Trovare il punto di intersezione di m e la retta PQ (cioè, la retta che passa per P e Q).
7. Sia $T \subset \mathbf{P}^2$ un triangolo di vertici A_1, A_2 e A_3 . Siano a_1, a_2 e a_3 i lati di T corrispondenti: $A_i \notin a_i$. Sia P un punto e siano Q_i per $i = 1, 2, 3$ i punti di intersezione $PA_i \cap a_i$. Dimostrare che i tre punti $Q_i Q_j \cap A_i A_j$ stanno su una retta.
8. Sia O un punto di \mathbf{P}^2 e siano l, m e n tre rette passanti per O . Siano P e Q due punti e sia $f : l \rightarrow n$ la proiezione da P di l su n seguita dalla proiezione da Q di m su n . Dimostrare che f è una proiezione da un punto R che sta sulla retta PQ .
9. Far vedere che i punti $(1 : 0 : 1)$, $B = (0 : 1 : 1)$, $C = (2 : 1 : 3)$ e $D = (3 : -1 : 2)$ stanno su una retta. Determinare i birapporti $(ABCD)$ e $(BACD)$.
10. Far vedere che i punti $P = (1 : 1 : 1)$, $Q = (2 : 1 : 3)$ e $R = (0 : 1 : -1)$ stanno su una retta l . Trovare il punto $S \in l$ tale che il birapporto $(PQRS)$ è uguale a 3.
11. Sia r una retta in \mathbf{P}^2 . Esibire una mappa proiettiva $f : r \rightarrow r$ che manda quattro punti distinti A, B, C e D in C, D, A e B (in questa ordine).
12. Sia l la retta di equazione $x_0 + x_1 = 0$. Siano $P = (0 : 1 : -1)$, $Q = (1 : 0 : 0)$ e $R = (1 : -1 : 1)$ tre punti di \mathbf{P}^2 .
 (i) Far vedere che i punti $A = (1 : -1 : 0)$, $B = (0 : 0 : 1)$ e $C = (-1 : 1 : 1)$ stanno su l .
 (ii) Far vedere che i punti P, Q e R stanno su una retta m .
 (iii) Dimostrare che esiste una mappa proiettiva $f : l \rightarrow m$ tale che $f(A) = P$, $f(B) = Q$ e $f(C) = R$.
 (iv) Determinare $f(1 : -1 : 1)$.