COGNOME .....

NOME .....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare ed essenziali*.
 NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $h > -1$ un numero reale. Dimostrare per induzione che $1 + nh \leq (1 + h)^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Per $n = 1$ l'affermazione è vera perché $1 + h \geq 1 + h$. Supponiamo che sia vera per n . Allora $(1 + h)^{n+1} = (1 + h)(1 + h)^n \geq (1 + h)(1 + nh) = 1 + (n + 1)h + nh^2$, il quale è maggiore o uguale a $1 + (n + 1)h$, perché $nh^2 \geq 0$. L'affermazione è quindi anche vera per $n + 1$.

2. Determinare il resto delle divisioni per 5, per 7 e per 11 di 2^{677} ; determinare il resto della divisione per 385 di 2^{677}

Sia $x = 2^{677}$. Siccome 5 è primo e l'esponente 677 è congruo a 1 modulo $4 = 5 - 1$, per il Teorema di Fermat abbiamo che $x \equiv 2^1 = 2 \pmod{5}$. Similmente, 677 è congruo a 5 (mod 6) e a 7 (mod 10) e quindi $x \equiv 2^5 \equiv 4 \pmod{7}$ e $x \equiv 2^7 \equiv 7 \pmod{11}$. I resti richiesti sono quindi rispettivamente 2, 4 e 7.

Siccome $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, un'applicazione del Teorema Cinese del Resto ci dà il resto della divisione per 385. Con un calcolo standard si trova che $x \equiv 172 \pmod{385}$. Il resto richiesto è quindi uguale a 172.

3. Siano x, y due variabili booleane. Definiamo $x \text{ NOR } y$ tramite $0 \text{ NOR } 0 = 1, 0 \text{ NOR } 1 = 0, 1 \text{ NOR } 0 = 0, 1 \text{ NOR } 1 = 0$. Esprimere $x + y, xy$ in termini del operatore NOR.

Osserviamo che $x \text{ NOR } x = \bar{x}$. Siccome $x + y = \overline{(x \text{ NOR } y)}$ abbiamo che $x + y = (x \text{ NOR } y) \text{ NOR } (x \text{ NOR } y)$. Similmente, siccome $xy = \overline{\bar{x} \text{ NOR } \bar{y}}$, abbiamo che $xy = (x \text{ NOR } x) \text{ NOR } (y \text{ NOR } y)$.

4. Sia $P = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Per $(a, b) \in P$ e $(c, d) \in P$ definiamo $(a, b) \leq (c, d)$ quando $ab \leq cd$. Stabilire se la relazione “ $\leq$ ” è: (a) riflessiva, (b) transitiva, (c) simmetrica (d) anti-simmetrica.

Siccome $ab \leq ab$ per ogni $a, b \in \mathbf{N}$, la relazione è riflessiva. Se $ab \leq cd$ e $cd \leq ef$, allora $ab \leq ef$. Questo implica che la relazione è transitiva. La relazione non è simmetrica perché $(1, 1) \leq (1, 2)$ mentre non vale $(1, 2) \leq (1, 1)$. La relazione non è nemmeno anti-simmetrica, perché $(2, 2) \leq (1, 4)$ e $(1, 4) \leq (2, 2)$, ma $(1, 4) \neq (2, 2)$.

5. Determinare quante sono le soluzioni $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_i \geq 0$ dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16$ con $x_2 \geq 2$ e $x_3 \leq 4$.

Ponendo $y_2 = x_2 - 2$, il problema è di determinare il numero delle soluzioni intere non negative dell'equazione $x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$, con $x_3 \leq 4$. Trascurando per adesso questa ultima condizione, ci sono $\binom{14+5-1}{5-1}$ soluzioni. Le soluzioni da scartare sono quelle con $x_3 \geq 5$. Ponendo $y_5 = x_3 - 5$, le soluzioni da scartare sono le soluzioni intere non negative dell'equazione $x_1 + y_2 + y_5 + x_4 + x_5 = 9$. Ci sono quindi $\binom{9+5-1}{5-1}$ soluzioni da scartare. Il numero delle soluzioni che soddisfano la condizione $x_3 \leq 4$ è quindi uguale a $\binom{18}{4} - \binom{13}{4} = 2345$.

6. Sull'insieme $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definiamo la relazione “ $\sim$ ” tramite $(a, b) \sim (c, d)$ quando $a + d = b + c$.

(a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.

Per ogni $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sia $[(a, b)]$ la sua classe di equivalenza.

(b) Dimostrare che la funzione $[(a, b)] \mapsto a - b$ è una biezione fra l'insieme delle classi di equivalenza e $\mathbf{Z}$.

(a) Siccome $a + b = a + b$ per ogni $a, b \in \mathbf{N}$, la relazione è riflessiva. La relazione è simmetrica perché da $(a, b) \sim (c, d)$ segue $b + c = a + d$ e quindi $(c, d) \sim (a, b)$. Se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, allora $a + d = b + c$ e $c + f = d + e$. Facendo la somma, troviamo che $a + f = e + b$ e quindi $(a, b) \sim (e, f)$. La relazione è quindi transitiva.

(b) Se $[(a, b)]$ e $[(c, d)]$ hanno la stessa immagine, allora $a - b = c - d$ e quindi $a + d = b + c$. In altre parole $(a, b) \sim (c, d)$ e quindi $[(a, b)] = [(c, d)]$. Questo dimostra che la funzione è iniettiva. La suriettività segue dal fatto che ogni $n \in \mathbf{Z}$ si può scrivere come differenza di due interi positivi a, b .