1. Sia A un anello. Dimostrare che i punti chiusi sono gli ideali massimali di A.
2. (a) Sia p un primo. Disegnare $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$, per $m \geq 1$;
   (b) Disegnare $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/10001\mathbf{Z})$.
3. (a) Disegnare $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_{(2)})$;
   (b) Disegnare $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$.
   (Si ricorda che $\mathbf{Z}_{(2)} = \{\frac{x}{y} \in \mathbf{Q} : y \text{ è dispari}\}$ e $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{x}{y} \in \mathbf{Q} : y \text{ è potenza di } 2\}$.)
4. (a) Sia p un primo. Disegnare $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p[X])$;
   (b) Disegnare $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[i])$.
5. (a) Sia k un campo algebricamente chiuso. Disegnare/descrivere $\mathrm{Spec}(k[x,y])$.
   (b) Disegnare/descrivere $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[X])$.
   (Sugg. Studiare $\mathrm{Spec}(R[X])$ per un dominio ad ideali principali R.)
6. Dimostrare che $\mathrm{Spec}(A)$ in generale non è di Hausdorff, ma è T_0. (Uno spazio topologico X si dice T_0 se dati due punti qualunque di X esiste un aperto U di X che ne contiene uno, ma non l'altro).
7. Sia A un anello. Dimostrare che $\mathrm{Spec}(A)$ è irriducibile se e solo se il nilradicale $\mathrm{Nil}(A)$ è un ideale primo. Dimostrare che in tal caso $\mathrm{Nil}(A)$ è l'unico ideale minimale di A. (Uno spazio topologico X si dice *irriducible* se X non è vuoto e se per ogni scrittura $X = Z \cup Z'$ con $Z, Z' \subset X$ chiusi, si ha $Z = X$ oppure $Z' = X$.)
8. (a) Dimostrare che un sottospazio Y di uno spazio topologico X è irriducibile se e solo se la chiusura $\overline{Y}$ è irriducibile.
   (b) Sia A un anello. Dimostrare che un sottospazio chiuso Y di $\mathrm{Spec}(A)$ è irriducibile se e solo se $Y = V(\mathfrak{p})$ per un ideale primo $\mathfrak{p}$ di A.
9. Sia X uno spazio topologico che è T_0. Dimostrare che ogni chiuso irriducibile $Y \subset X$ contiene al massimo un punto generico. (Un punto x di uno spazio topologico irriducibile X si dice punto *generico* di X se $\overline{\{x\}} = X$.)
10. Sia A un anello. Dimostrare che ogni chiuso Y di $\mathrm{Spec}(A)$ contiene un punto generico. Più precisamente far vedere che la mappa $\mathfrak{p} \mapsto \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ definisce una biezione fra $\mathrm{Spec}(A)$ e la collezione dei sottoinsiemi chiusi irriducibili di $\mathrm{Spec}(A)$.
11. Esibire un sottoinsieme irriducibile di $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ che non contiene alcun punto generico.
12. Sia $f : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Sia $\mathfrak{q}$ un ideale primo di B e sia $\mathfrak{p} = f^{-1}\mathfrak{q}$. Definire l'omomorfismo $f_\mathfrak{p} : A_\mathfrak{p} \longrightarrow B_\mathfrak{q}$ indotto da f. Dimostrare che $f_\mathfrak{p}$ è *locale*. In altre parole, dimostrare che $f_\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{m}_\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$. Qua $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ (risp. $\mathfrak{m}_\mathfrak{q}$) indica l'ideale massimale dell'anello locale $A_\mathfrak{p}$ (risp. $B_\mathfrak{q}$).
13. Sia k un campo, sia $A = k[X,Y]$ e sia $\mathcal{O}_A$ il fascio di struttura dello schema $\mathrm{Spec}(A)$. Sia $U = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : X \notin \mathfrak{p}\}$ e sia $V = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : Y \notin \mathfrak{p}\}$.
    Calcolare $\mathcal{O}_A(U)$, $\mathcal{O}_A(V)$, $\mathcal{O}_A(U \cap V)$ e $\mathcal{O}_A(U \cup V)$.