Trasformata di Fourier su $L^2(\mathbb{R})$

Trasformata di Fourier della Gussiana. Consideriamo la funzione Gaussiana

$$g_a(t) := e^{-at^2} \ , \qquad a > 0 \ .$$

g_a appartiene allo spazio delle funzioni di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ quindi sappiamo che la sua trasformata appartiene ancora a tale spazio ed è, in particolare, derivabile infinite volte. Si osservi che derivando ed integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\widehat{g_a}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -it\, e^{-ixt}\, e^{-at^2}\, dt \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-1}{2a}\, e^{-ixt}\, e^{-at^2} \,\big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2a} \int_{\mathbb{R}} -ixe^{-ixt}\, e^{-at^2}\, dt \right) \\
&= \frac{-x}{2a}\, \widehat{g_a}(x)
\end{aligned}$$

Osservando che

$$\widehat{g_a}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} = \frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Si ha che la trasformata di Fourier della Gaussiana soddisfa la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} \widehat{g_a}'(x) = -\frac{x}{2a}\, \widehat{g_a}(x) \\ \\ \widehat{g_a}(0) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\boxed{\widehat{g_a}(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \ , e^{-\frac{x^2}{4a}}} \tag{0.3}$$

In particolare per $a = 1$ si ha $\widehat{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Inversione della trasformata di Fourier su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Siano $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si consideri il seguente calcolo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x)\, \widehat{f}(x)\, e^{itx}\, dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} f(u) du \right) e^{itx}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(u-t)} g(x) dx \right) du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \widehat{g}(u-t)\, du
\end{aligned}$$

dove lo scambio nell'ordine di integrazione è lecito in quanto stiamo lavorando con funzioni di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (si può applicare Fubini-Tonelli).

Ora, dato $\varepsilon > 0$ e ricordando la relazione $\widehat{g_\varepsilon(t)}(x) = \frac{1}{\varepsilon}\widehat{g(t)}(\frac{x}{\varepsilon})$ dove $g_\varepsilon(t) := g(\varepsilon t)$, dalla relazione sopra ottenuta segue che

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, \widehat{f}(x)\, e^{itx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \widehat{g}_\varepsilon(u-t)\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \frac{1}{\varepsilon}\widehat{g}\left(\frac{u-t}{\varepsilon}\right) du$$

e cambiando variabile di integrazione nell'ultimo integrale, $v = (u-t)/\varepsilon$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(\varepsilon x)\, \widehat{f}(x)\, e^{itx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\varepsilon v + t)\, \widehat{g}(v)\, dv$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ sotto il segno di integrale si ottiene

$$g(0)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\, e^{itx}\, dx = f(t)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(v)\, dv\ .$$

Il passaggio al limite sotto il segno di integrale è lecito in quanto lavoriamo con funzioni di Schwartz, quindi sono limitate. Possiamo quindi trovare due constanti M_1 e M_2 tali che $|g(\varepsilon x)| \leq M_1$ per ogni ε e per ogni x e $|f(\varepsilon v + t)| \leq M_2$ per ogni ε, v e t. Possiamo quandi applicare Lebesgue per passare al limite sotto il segno di integrale.

Infine se prendiamo $g(t) = e^{-t^2}$, la Gaussiana con $a = 1$, e ricordando che la trasformata di Fourier della Guassiana è pari a $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-v^2/4}$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\, e^{itx}\, dx = f(t)\, \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2/4}\, dv\ ,$$

cambiando variabile nell'ultimo integrale, $s = v/2$ e ricordando che $\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} = \sqrt{\pi}$ si ha

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\, e^{itx}\, dx = f(t)\ , \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ ,}$$

che completa la dimostrazione.

Da questa relazione segue che la trasformata di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è un'isomorfismo: è iniettiva, per quanto appena visto, ma è anche suriettiva: Si osservi infatti che la formula dell'antitrasformata si può esprimere

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{itx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-it(-x)} = \mathcal{F}(f)(-x)$$

Per cui data $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e posto $f_-(t) := f(-t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, applicandoo due volte la trasformata di Fourier si ottiene

$$\mathcal{F}^2(f_-)(t) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f_-))(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_-))(-t) = f_-(-t) = f(t)$$

da questo segue che ogni funzione di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è immagine della trasformata di Fourier di una funzione di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ossia la suriettività.

Conservazione della norma $L^2(\mathbb{R})$ della trasformata di Fourier. Facciamo vedere ora che la trasformata di Fourier di una funzioni di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ conserva il prodotto scalare su $L^2(\mathbb{R})$. Infatti

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle_2 &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}}(x)\widehat{g}(x)\ , dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(t)\, e^{itx}\, dt \right) \widehat{g}(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(x)\, e^{itx}\, dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(t)\, g(t)\, dt \\ &= \langle f, g \rangle_2 \ ,\end{aligned}$$

dove si è sfruttata la formula di inversione precedentemente provata. Quindi

$$\boxed{\left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle_2 = \langle f, g \rangle_2 \ , \qquad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ .}$$

Osservado che $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle_2$ segue la conservazione della norma.

Estensione ad $L^2(\mathbb{R})$. Ricordiamo che lo spazio delle funzioni di Schwartz è denso in $L^2(\mathbb{R})$: per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ esiste una successione $\{f_n\}$ di funzioni di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che

$$\|f - f_n\|_2 = (\langle f - f_n, f - f_n \rangle_2)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|^2 \right)^{1/2} \overset{n\to\infty}{\to} 0\ ,$$

Dato che $L^2(\mathbb{R})$ è completo la successione $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy nella norma L^2. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che per ogni $n, m > n_eps$ si ha

$$\varepsilon > \|f_m - f_n\|_2 = \|\widehat{f_m} - \widehat{f}_n\|_2$$

Quindi anche la successione delle trasformate di Fourier è di Cauchy. Per la completezza dello spazio $L^2(\mathbb{R})$ si ha che esiste una funzione $\widehat{f}$ di $L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\|\widehat{f} - \widehat{f}_n\|_2 \overset{n\to\infty}{\to} 0\ .$$

Chiamiamo quindi la funzione $\widehat{f}$ limite delle trasformate di Fourier $\widehat{f}_n$ la **trasformata di Fourier di $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$**.

Si osservi che tale definizione è ben posta: se $\{g_m\}$ è un'altra succesione di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergente ad f allora le trasformate di Fourier $\widehat{g_n}$ convergono allo stesso limite delle $\widehat{f}_n$ per via della conservazione della norma $L^2(\mathbb{R})$ della trasformata di Fourier di funzioni di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\|\widehat{g_n} - \widehat{f}_n\|_2 = \|\widehat{g_n - f_n}\|_2 = \|g_n - f_n\|_2$$

quindi il limite è unico. Si osservi infine che per la stessa ragione la norma della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ di una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ è la stessa di f. Se ne conclude che la trasformata di Fourier è un isomorfismo isometrico di $L^2(\mathbb{R})$ in se stesso.

Il teorema del campionamento. Sia f una funzione a banda limitata, ossia la traformata di Fourier
$$\widehat{f}(\nu) = 0 \quad , \quad |\nu| \leq \overline{\nu}$$
con $\overline{\nu} > 0$. Nelle ipotesi che $\widehat{f}$ sia sufficientemente regolare possiamo svilupparla in serie di Fourier con periodicità uguale a $2\overline{\nu}$:
$$\widehat{f}(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, e^{i\frac{\pi}{\overline{\nu}}k\nu} \ ,$$
dove
$$c(k) = \frac{1}{2\overline{\nu}} \int_{-\overline{\nu}}^{\overline{\nu}} \widehat{f}(\nu)\, e^{-i\frac{\pi}{\overline{\nu}}k\nu}\, d\nu \ ,$$
Tuttavia osservando che $\widehat{f}(\nu)$ è nulla per $|\nu| \geq \overline{\nu}$ il precendente integrale è uguale all'integrale su tutto $\mathbb{R}$ e usando le formule di inversione della trasformata di Fourier si ha
$$c(k) = \frac{1}{2\overline{\nu}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)\, e^{-i\frac{\pi}{\overline{\nu}}k\nu}\, d\nu = \frac{1}{2\overline{\nu}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)\, e^{i(-\frac{\pi}{\overline{\nu}}k)\nu}\, d\nu = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\overline{\nu}}\, f\left(-\frac{\pi}{\overline{\nu}}k\right)$$
quindi
$$\widehat{f}(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\overline{\nu}}\, f\left(-\frac{\pi}{\overline{\nu}}k\right)\, e^{i\frac{\pi}{\overline{\nu}}k\nu} \ ,$$
tuttavia
$$\widehat{f}(\nu) = \widehat{f}(\nu)\, \chi_{[-\overline{\nu},\overline{\nu}]}(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\overline{\nu}}\, f\left(-\frac{\pi}{\overline{\nu}}k\right)\, e^{i\frac{\pi}{\overline{\nu}}k\nu}\, \chi_{[-\overline{\nu},\overline{\nu}]}(\nu)$$
Per cui passando all'antitrasformata e osservado che
$$\int_{\mathbb{R}} e^{it\nu} e^{i\frac{\pi}{\overline{\nu}}k\nu}\, \chi_{[-\overline{\nu},\overline{\nu}]}(\nu)\, d\nu = \int_{-\overline{\nu}}^{\overline{\nu}} e^{i(t+\frac{\pi}{\overline{\nu}}k)\nu}\, d\nu = \frac{2\overline{\nu}}{t\overline{\nu} + k\pi} \sin(t\overline{\nu} + \pi k)$$
si ottiene
$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\overline{\nu}\sqrt{2\pi}}\, f\left(-\frac{\pi}{\overline{\nu}}k\right)\, \frac{2\overline{\nu}}{t\overline{\nu} + k\pi} \sin(t\overline{\nu} + \pi k) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(-\frac{\pi}{\overline{\nu}}k\right)\, \frac{\sin(t\overline{\nu} + \pi k)}{t\overline{\nu} + k\pi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(-\frac{\pi}{\overline{\nu}}k\right)\, (-1)^k \frac{\sin(t\overline{\nu})}{t\overline{\nu} + k\pi} \end{aligned}$$
ossia
$$\boxed{f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k f\left(-\frac{k\pi}{\overline{\nu}}\right) \frac{\sin(t\overline{\nu})}{t\overline{\nu} + k\pi}}$$