

ANALISI MATEMATICA I (INGEGNERIA) A.A. 2008/2009
Appello scritto del 4 Settembre 2009

A

I & II parte (10 CFU)

1. Studiare e disegnare il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\ln|x|}$$

trovando eventuali punti di massimo, di minimo, di flesso, asintoti. Studiare inoltre gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità di $f(x)$.

2. Studiare la convergenza semplice e la convergenza assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + e^{-n}}{2n^2 + 3} \cos(n\pi)$$

3. Scrivere le seguenti funzioni infinitesime in ordine di infinitesimo crescente, per $x \rightarrow 0^+$:

$$f(x) = x \ln x, \quad g(x) = e^{\sqrt{x}} - 1, \quad h(x) = e^{-1/x}$$

4. Discutere la convergenza degli integrali impropri e calcolare il valore di I , se esiste:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1 + 2|x|} dx$$

I parte (5 CFU)

1. Studiare e disegnare il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\ln|x|}$$

trovando eventuali punti di massimo, di minimo, di flesso, asintoti. Studiare inoltre gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità di $f(x)$.

2. Calcolare il limite, se esiste:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cos\left(\frac{n^3}{n + \sqrt{n}}\right) \sin\left(\frac{3}{n}\right)$$

3. Scrivere le seguenti funzioni infinitesime in ordine di infinitesimo crescente, per $x \rightarrow 0^+$:

$$f(x) = x \ln x, \quad g(x) = e^{\sqrt{x}} - 1, \quad h(x) = e^{-1/x}$$

4. Studiare la derivabilità in $x = 0$ della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

II parte (5 CFU)

1. Risolvere la seguente equazione in \mathbf{C} e rappresentarne graficamente le soluzioni nel piano complesso:

$$(z - 1)^3 + i = 0$$

2. Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + e^{-n}}{2n^2 + 3} \cos(n\pi)$$

3. Calcolare il limite, se esiste:

$$\lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{\int_3^{2x} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt}{\tan(2x - 3)}$$

4. Discutere la convergenza degli integrali impropri e calcolare il valore di I , se esiste:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1 + 2|x|} dx$$

ANALISI MATEMATICA I (INGEGNERIA) A.A. 2008/2009
Appello scritto del 4 Settembre 2009

B

I & II parte (10 CFU)

1. Studiare e disegnare il grafico della funzione:

$$f(x) = \left| \frac{x}{\ln x} \right|$$

trovando eventuali punti di massimo, di minimo, di flesso, asintoti. Studiare inoltre gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità di $f(x)$.

2. Studiare la convergenza semplice e la convergenza assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + e^{-2n}}{n^3 + 1} \cos(n\pi)$$

3. Scrivere le seguenti funzioni infinitesime in ordine di infinitesimo crescente, per $x \rightarrow 0^+$:

$$f(x) = \tan x, \quad g(x) = e^{3\sqrt{x}} - 1, \quad h(x) = x \ln(3x)$$

4. Discutere la convergenza degli integrali impropri e calcolare il valore di I , se esiste:

$$I = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$$

I parte (5 CFU)

1. Studiare e disegnare il grafico della funzione:

$$f(x) = \left| \frac{x}{\ln x} \right|$$

trovando eventuali punti di massimo, di minimo, di flesso, asintoti. Studiare inoltre gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità di $f(x)$.

2. Calcolare il limite, se esiste:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/5} \sin \left(\frac{n^2}{n + \sqrt{n}} \right) \tan(5/n)$$

3. Scrivere le seguenti funzioni infinitesime in ordine di infinitesimo crescente, per $x \rightarrow 0^+$:

$$f(x) = \tan x, \quad g(x) = e^{3\sqrt{x}} - 1, \quad h(x) = x \ln(3x)$$

4. Studiare la derivabilità in $x = 0$ della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

II parte (5 CFU)

1. Risolvere la seguente equazione in \mathbf{C} e rappresentarne graficamente le soluzioni nel piano complesso:

$$(z + i)^3 = \frac{1 - i}{1 + i}$$

2. Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + e^{-2n}}{n^3 + 1} \cos(n\pi)$$

3. Calcolare il limite, se esiste:

$$\lim_{x \rightarrow 4/3} \frac{\int_4^{3x} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt}{\sin(3x - 4)}$$

4. Discutere la convergenza degli integrali impropri e calcolare il valore di I , se esiste:

$$I = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$$

ANALISI MATEMATICA I (INGEGNERIA) A.A. 2008/2009
Appello scritto del 4 Settembre 2009

C

I & II parte (10 CFU)

1. Studiare e disegnare il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{|\ln x|}$$

trovando eventuali punti di massimo, di minimo, di flesso, asintoti. Studiare inoltre gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità di $f(x)$.

2. Studiare la convergenza semplice e la convergenza assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n - e^{-n}}{7n^2 + 2} \cos(n\pi)$$

3. Scrivere le seguenti funzioni infinitesime in ordine di infinitesimo decrescente, per $x \rightarrow 0^+$:

$$f(x) = x \ln x, \quad g(x) = e^{\sqrt{x}} - 1, \quad h(x) = \sin^2 \sqrt{x}$$

4. Discutere la convergenza degli integrali impropri e calcolare il valore di I , se esiste:

$$I = -2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1 + 2|x|} dx$$

I parte (5 CFU)

1. Studiare e disegnare il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{|\ln x|}$$

trovando eventuali punti di massimo, di minimo, di flesso, asintoti. Studiare inoltre gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità di $f(x)$.

2. Calcolare il limite, se esiste:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cos \left(\frac{n^3}{n + \sqrt{n}} \right) \sin(7/n^2)$$

3. Scrivere le seguenti funzioni infinitesime in ordine di infinitesimo decrescente, per $x \rightarrow 0^+$:

$$f(x) = x \ln x, \quad g(x) = e^{\sqrt{x}} - 1, \quad h(x) = \sin^2 \sqrt{x}$$

4. Studiare la derivabilità in $x = 0$ della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

II parte (5 CFU)

1. Risolvere la seguente equazione in \mathbf{C} e rappresentarne graficamente le soluzioni nel piano complesso:

$$(z + 1)^3 + i = 0$$

2. Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n - e^{-n}}{7n^2 + 2} \cos(n\pi)$$

3. Calcolare il limite, se esiste:

$$\lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{\int_{2x}^3 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt}{\tan(2x - 3)}$$

4. Discutere la convergenza degli integrali impropri e calcolare il valore di I , se esiste:

$$I = -2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1 + 2|x|} dx$$

ANALISI MATEMATICA I (INGEGNERIA) A.A. 2008/2009
Appello scritto del 4 Settembre 2009

D

I & II parte (10 CFU)

1. Studiare e disegnare il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{|x|}{\ln x}$$

trovando eventuali punti di massimo, di minimo, di flesso, asintoti. Studiare inoltre gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità di $f(x)$.

2. Studiare la convergenza semplice e la convergenza assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\cos(n\pi) \frac{n + e^{-n}}{8n^2 + 3}$$

3. Scrivere le seguenti funzioni infinitesime in ordine di infinitesimo decrescente, per $x \rightarrow 0^+$:

$$f(x) = \cos x - 1, \quad g(x) = e^{\sqrt{x}} - 1, \quad h(x) = x \ln(2x)$$

4. Discutere la convergenza degli integrali impropri e calcolare il valore di I , se esiste:

$$I = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx + 2 \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$$

I parte (5 CFU)

1. Studiare e disegnare il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{|x|}{\ln x}$$

trovando eventuali punti di massimo, di minimo, di flesso, asintoti. Studiare inoltre gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità di $f(x)$.

2. Calcolare il limite, se esiste:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) (n^2 + \pi)$$

3. Scrivere le seguenti funzioni infinitesime in ordine di infinitesimo decrescente, per $x \rightarrow 0^+$:

$$f(x) = \cos x - 1, \quad g(x) = e^{\sqrt{x}} - 1, \quad h(x) = x \ln(2x)$$

4. Studiare la derivabilità in $x = 0$ della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 9x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

II parte (5 CFU)

1. Risolvere la seguente equazione in \mathbf{C} e rappresentarne graficamente le soluzioni nel piano complesso:

$$-(z + i)^3 = \frac{i - 1}{i + 1}$$

2. Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\cos(n\pi) \frac{n + e^{-n}}{8n^2 + 3}$$

3. Calcolare il limite, se esiste:

$$\lim_{x \rightarrow 4/3} \frac{\int_{3x}^4 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt}{\sin(3x - 4)}$$

4. Discutere la convergenza degli integrali impropri e calcolare il valore di I , se esiste:

$$I = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx + 2 \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$$

Cenni soluzioni dell'appello del 4 Settembre 2009

Grafico funzione (A) $\text{dom}(f) = \{x \neq \pm 1\}$; $x = \pm 1$ asintoti verticali. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; max relativo per $x = -e$, min relativo per $x = e$. Flessi per $x = -e^2$ e $x = e^2$.

(B) $\text{dom}(f) = \{x \neq 1\}$; $x = 1$ asintoto verticale. $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = +\infty$; min relativo per $x = e$. Flesso per $x = e^2$.

(C) come (B)

(D) $\text{dom}(f) = \{x \neq 1\}$; $x = 1$ asintoto verticale. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; min relativo per $x = e$. Flesso per $x = e^2$.

Serie (A), (C), (D) converge semplicemente, ma non assolutamente; (B) converge assolutamente.

Funz. infinitesime (A) in ordine di infinitesimo crescente: f, g, h . (B) in ordine di infinitesimo crescente: h, g, f . (C) in ordine di infinitesimo decrescente: h, g, f . (D) in ordine di infinitesimo decrescente: f, g, h .

Integrale (A) $I = 2$; (B) $I = 2 - \frac{1}{2} \ln \frac{e+1}{e-1}$; (D) $I = 2 + \ln \frac{e+1}{e-1}$

Limite di succ. (A) 0. (B) 0. (C) 0. (D) 3.

studio derivabilità di $f(x)$ (A), (B), (C), (D) $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = 0$; pertanto f è derivabile in $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

Equazione in campo complesso (A) $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 + \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - i), z_3 = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$ (B) $z_1 = -1 + i, z_2 = -1 + \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - i), z_3 = -1 + \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$; (C) come(B); (D) come (B).

Eserc. 3 II parte (A) $\ln 3/\sqrt{3}$; (B) $\ln 4/2$; (C) $-\ln 3/\sqrt{3}$; (D) $-\ln 4/2$.