Esame di Geometria del 28 giugno 2011 (I appello)

Orali: vedi avviso.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

☐ 5 cfu
☐ 6 cfu

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.
Avviso: gli studenti che sostengono l'esame da **5 cfu** (vecchio ordinamento) **non** sono tenuti a svolgere le domande contrassegnate con l'asterisco.

---

1. Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ una sua base. Siano inoltre $\vec{w}_1 = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $W = \mathrm{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.
a) Provare la seguente affermazione: $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ è una base di W;
b) determinare se $\vec{v}_1 \in W$ e, in caso di risposta affermativa, determinare le sue coordinate rispetto alla base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ di W.

2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Assumiamo che il nucleo $\ker F$ sia lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\{x + y - z = 0$, sia 8 un autovalore di F e $V_8 := \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ il relativo autospazio.
a) Dire se F è diagonalizzabile (in questo caso indicare una base di autovettori ed i corrispondenti autovalori);
b) scrivere il polinomio caratteristico dell'endomorfismo F;
c) calcolare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
d) scegliere due autovettori indipendenti $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e calcolare $F \circ F(3\vec{u} - 5\vec{v})$ (dove "$\circ$" denota la composizione).

3. Si considerino lo spazio $\mathbb{R}^3$, con coordinate (x, y, z), e le rette indicate

$$r : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

a) stabilire se le due rette date hanno un punto in comune;
b) scrivere equazioni parametriche per la retta r.
Si consideri $\mathbb{R}^3$ con la struttura naturale di spazio Euclideo,
★**c)** determinare l'equazione cartesiana del piano passante per l'origine ortogonale ad r;
★**d)** determinare la distanza dell'origine dalla retta r;

4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, il piano $\mathcal{H}$ di equazione $x + y - 2z = 0$ ed il vettore $\vec{v}_t = \begin{pmatrix}1\\t\\3\end{pmatrix}$.
a) trovare il valore t_0 per il quale $\vec{v}_{t_0}$ appartiene ad $\mathcal{H}$;
b) trovare i valori t_1 per i quali risulta $\mathrm{Span}\{\vec{v}_{t_1}\} + \mathcal{H} = \mathbb{R}^3$;
c) trovare una base di $\mathcal{H}$ contenente il vettore $\vec{v}_{t_0}$;
★**d)** si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato della naturale struttura di spazio Euclideo. Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su $\mathcal{H}$, determinarne la matrice rappresentativa (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$).

Esame di Geometria del 28 giugno 2011 (I appello)

Orali: vedi avviso.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

☐ $5\ cfu$
☐ $6\ cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.
Avviso: gli studenti che sostengono l'esame da **5 cfu** (vecchio ordinamento) **non** sono tenuti a svolgere le domande contrassegnate con l'asterisco.

---

1. Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ una sua base. Siano inoltre $\vec{w}_1 = 4\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.
a) Provare la seguente affermazione: $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ è una base di W;
b) determinare se $\vec{v}_2 \in W$ e, in caso di risposta affermativa, determinare le sue coordinate rispetto alla base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ di W.

2. Sia $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Assumiamo che il nucleo $\ker F$ sia lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\{x - y + z = 0$, sia 6 un autovalore di F e $V_6 := \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ il relativo autospazio.
a) Dire se F è diagonalizzabile (in questo caso indicare una base di autovettori ed i corrispondenti autovalori);
b) scrivere il polinomio caratteristico dell'endomorfismo F;
c) calcolare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
d) scegliere due autovettori indipendenti $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e calcolare $F \circ F(2\vec{u} - 3\vec{v})$ (dove "$\circ$" denota la composizione).

3. Si considerino lo spazio $\mathbb{R}^3$, con coordinate (x, y, z), e le rette indicate

$$r : \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

a) stabilire se le due rette date hanno un punto in comune;
b) scrivere equazioni parametriche per la retta r.
Si consideri $\mathbb{R}^3$ con la struttura naturale di spazio Euclideo,
★**c)** determinare l'equazione cartesiana del piano passante per l'origine ortogonale ad r;
★**d)** determinare la distanza dell'origine dalla retta r;

4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, il piano $\mathcal{H}$ di equazione $x - y + 2z = 0$ ed il vettore $\vec{v}_t = \begin{pmatrix} t \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
a) trovare il valore t_0 per il quale $\vec{v}_{t_0}$ appartiene ad $\mathcal{H}$;
b) trovare i valori t_1 per i quali risulta $\text{Span}\{\vec{v}_{t_1}\} + \mathcal{H} = \mathbb{R}^3$;
c) trovare una base di $\mathcal{H}$ contenente il vettore $\vec{v}_{t_0}$;
★**d)** si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato della naturale struttura di spazio Euclideo. Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su $\mathcal{H}$, determinarne la matrice rappresentativa (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$).

Esame di Geometria del 28 giugno 2011 (I appello)

Orali: vedi avviso.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

☐ 5 cfu
☐ 6 cfu

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.
Avviso: gli studenti che sostengono l'esame da **5 cfu** (vecchio ordinamento) **non** sono tenuti a svolgere le domande contrassegnate con l'asterisco.

---

1. Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ una sua base. Siano inoltre $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = -5\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$, $W = \mathrm{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.
a) Provare la seguente affermazione: $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ è una base di W;
b) determinare se $\vec{v}_1 \in W$ e, in caso di risposta affermativa, determinare le sue coordinate rispetto alla base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ di W.

2. Sia $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Assumiamo che il nucleo $\ker F$ sia lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\{x + y + z = 0$, sia 4 un autovalore di F e $V_4 := \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$ il relativo autospazio.
a) Dire se F è diagonalizzabile (in questo caso indicare una base di autovettori ed i corrispondenti autovalori);
b) scrivere il polinomio caratteristico dell'endomorfismo F;
c) calcolare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
d) scegliere due autovettori indipendenti $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e calcolare $F \circ F(5\vec{u} - 2\vec{v})$ (dove "$\circ$" denota la composizione).

3. Si considerino lo spazio $\mathbb{R}^3$, con coordinate (x, y, z), e le rette indicate

$$r: \begin{cases} 2y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}, \qquad s: \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

a) stabilire se le due rette date hanno un punto in comune;
b) scrivere equazioni parametriche per la retta r.
Si consideri $\mathbb{R}^3$ con la struttura naturale di spazio Euclideo,
★**c)** determinare l'equazione cartesiana del piano passante per l'origine ortogonale ad r;
★**d)** determinare la distanza dell'origine dalla retta r;

4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, il piano $\mathcal{H}$ di equazione $x - y + 3z = 0$ ed il vettore $\vec{v}_t = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$.
a) trovare il valore t_0 per il quale $\vec{v}_{t_0}$ appartiene ad $\mathcal{H}$;
b) trovare i valori t_1 per i quali risulta $\mathrm{Span}\{\vec{v}_{t_1}\} + \mathcal{H} = \mathbb{R}^3$;
c) trovare una base di $\mathcal{H}$ contenente il vettore $\vec{v}_{t_0}$;
★**d)** si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato della naturale struttura di spazio Euclideo. Sia $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su $\mathcal{H}$, determinarne la matrice rappresentativa (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$).

Esame di Geometria del 28 giugno 2011 (I appello)

Orali: vedi avviso.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

☐ 5 cfu
☐ 6 cfu

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.
Avviso: gli studenti che sostengono l'esame da **5 cfu** (vecchio ordinamento) **non** sono tenuti a svolgere le domande contrassegnate con l'asterisco.

---

1. Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ una sua base. Siano inoltre $\vec{w}_1 = 3\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, $W = \mathrm{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.
a) Provare la seguente affermazione: $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ è una base di W;
b) determinare se $\vec{v}_2 \in W$ e, in caso di risposta affermativa, determinare le sue coordinate rispetto alla base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ di W.

2. Sia $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Assumiamo che il nucleo $\ker F$ sia lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\{x - y - z = 0$, sia 5 un autovalore di F e $V_5 := \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$ il relativo autospazio.
a) Dire se F è diagonalizzabile (in questo caso indicare una base di autovettori ed i corrispondenti autovalori);
b) scrivere il polinomio caratteristico dell'endomorfismo F;
c) calcolare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
d) scegliere due autovettori indipendenti $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e calcolare $F \circ F(4\vec{u} - 3\vec{v})$ (dove "$\circ$" denota la composizione).

3. Si considerino lo spazio $\mathbb{R}^3$, con coordinate (x, y, z), e le rette indicate

$$r : \begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

a) stabilire se le due rette date hanno un punto in comune;
b) scrivere equazioni parametriche per la retta r.
Si consideri $\mathbb{R}^3$ con la struttura naturale di spazio Euclideo,
★**c)** determinare l'equazione cartesiana del piano passante per l'origine ortogonale ad r;
★**d)** determinare la distanza dell'origine dalla retta r;

4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, il piano $\mathcal{H}$ di equazione $x - y - 2z = 0$ ed il vettore $\vec{v}_t = \begin{pmatrix} t \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
a) trovare il valore t_0 per il quale $\vec{v}_{t_0}$ appartiene ad $\mathcal{H}$;
b) trovare i valori t_1 per i quali risulta $\mathrm{Span}\{\vec{v}_{t_1}\} + \mathcal{H} = \mathbb{R}^3$;
c) trovare una base di $\mathcal{H}$ contenente il vettore $\vec{v}_{t_0}$;
★**d)** si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato della naturale struttura di spazio Euclideo. Sia $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su $\mathcal{H}$, determinarne la matrice rappresentativa (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$).