Esame di Geometria del giorno 8 settembre 2011

Orali: vedi avviso.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

☐ 5 cfu
☐ 6 cfu

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.
Avviso: gli studenti che sostengono l'esame da **5 cfu** (vecchio ordinamento) **non** sono tenuti a svolgere le domande contrassegnate con l'asterisco.

---

1. Si considerino le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definite dalle relazioni

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1+x_3 \\ x_1+x_2 \\ x_1+x_2 \\ x_1-x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad g(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y_1-y_2-y_3-y_4 \\ y_2+2y_4 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare basi e dimensioni del nucleo e dell'immagine di f;
b) posto $U = \mathrm{Im}\, f$ e $W = \ker g$ determinare una base e la dimensione dell'intersezione $U \cap W$;
c) determinare una base dello spazio somma $U + W$ e dire se $U + W$ è somma diretta di U e W (=dire se gli spazi U e W sono indipendenti).

2. Si considerino le trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ associate alle (=rappresentate nella base canonica dalle) matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Stabilire quali trasformazioni sono diagonalizzabili (enunciare in modo chiaro i risultati teorici utilizzati);
b) scegliere una trasformazione diagonalizzabile tra quelle date e determinare una base di autovettori;
c) stabilire quali tra queste trasformazioni hanno almeno 2 autovettori indipendenti.

3. Si consideri la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 0 & t+1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire i valori di t per i quali A_t è invertibile;
b) per i valori di t per i quali A_t è invertibile calcolare il determinante della matrice $5 \cdot (A_t)^{-2}$;
c) posto $t = 2$ calcolare l'inversa di A_t nonché determinare le soluzioni del sistema lineare $\left(A_2\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Si considerino, in $\mathbb{R}^3$, la retta affine $\mathcal{S}$ definita dal sistema lineare $\begin{cases} x+y-7z = 2 \\ x-2z = 1 \end{cases}$ ed il punto $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\mathcal{H}$ passante per l'origine contenente $\mathcal{S}$;
b) stabilire se $Q \in \mathcal{H}$.

Si consideri $\mathbb{R}^3$ con la struttura naturale di spazio Euclideo.

★**c)** determinare la distanza di Q da $\mathcal{H}$;
★**d)** determinare la proiezione ortogonale $\pi_{\mathcal{H}}(Q)$ del punto Q sul piano $\mathcal{H}$.

Orali: vedi avviso.

Esame di Geometria del giorno 8 settembre 2011

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ 5 cfu ☐ 6 cfu

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.
Avviso: gli studenti che sostengono l'esame da **5 cfu** (vecchio ordinamento) **non** sono tenuti a svolgere le domande contrassegnate con l'asterisco.

---

1. Si considerino le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definite dalle relazioni

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ -x_1+x_2 \\ x_1+2x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad g\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1+4y_2-y_3+y_4 \\ 4y_2+y_4 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare basi e dimensioni del nucleo e dell'immagine di f;
b) posto $U = \mathrm{Im}\, f$ e $W = \ker g$ determinare una base e la dimensione dell'intersezione $U \cap W$;
c) determinare una base dello spazio somma $U + W$ e dire se $U + W$ è somma diretta di U e W (=dire se gli spazi U e W sono indipendenti).

2. Si considerino le trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ associate alle (=rappresentate nella base canonica dalle) matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

a) Stabilire quali trasformazioni sono diagonalizzabili (enunciare in modo chiaro i risultati teorici utilizzati);
b) scegliere una trasformazione diagonalizzabile tra quelle date e determinare una base di autovettori;
c) stabilire quali tra queste trasformazioni hanno almeno 2 autovettori indipendenti.

3. Si consideri la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3 & t+1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire i valori di t per i quali A_t è invertibile;
b) per i valori di t per i quali A_t è invertibile calcolare il determinante della matrice $2 \cdot (A_t)^{-3}$;
c) posto $t = 2$ calcolare l'inversa di A_t nonché determinare le soluzioni del sistema lineare $\left(A_2\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Si considerino, in $\mathbb{R}^3$, la retta affine $\mathcal{S}$ definita dal sistema lineare $\begin{cases} 2x+2y+z = 1 \\ x+y+3z = 1 \end{cases}$ ed il punto $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\mathcal{H}$ passante per l'origine contenente $\mathcal{S}$;
b) stabilire se $Q \in \mathcal{H}$.

Si consideri $\mathbb{R}^3$ con la struttura naturale di spazio Euclideo.

★**c)** determinare la distanza di Q da $\mathcal{H}$;
★**d)** determinare la proiezione ortogonale $\pi_{\mathcal{H}}(Q)$ del punto Q sul piano $\mathcal{H}$.

Esame di Geometria del giorno 8 settembre 2011

Orali: vedi avviso.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

☐ 5 cfu
☐ 6 cfu

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.
Avviso: gli studenti che sostengono l'esame da **5 cfu** (vecchio ordinamento) **non** sono tenuti a svolgere le domande contrassegnate con l'asterisco.

---

1. Si considerino le applicazioni lineari $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $g:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definite dalle relazioni

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ -x_1+x_2 \\ -x_1-x_2-x_3 \\ x_1+x_2-x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad g\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1+2y_2-2y_3-5y_4 \\ 3y_1-5y_4 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare basi e dimensioni del nucleo e dell'immagine di f;
b) posto $U = \operatorname{Im} f$ e $W = \ker g$ determinare una base e la dimensione dell'intersezione $U \cap W$;
c) determinare una base dello spazio somma $U+W$ e dire se $U+W$ è somma diretta di U e W (=dire se gli spazi U e W sono indipendenti).

2. Si considerino le trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ associate alle (=rappresentate nella base canonica dalle) matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Stabilire quali trasformazioni sono diagonalizzabili (enunciare in modo chiaro i risultati teorici utilizzati);
b) scegliere una trasformazione diagonalizzabile tra quelle date e determinare una base di autovettori;
c) stabilire quali tra queste trasformazioni hanno almeno 2 autovettori indipendenti.

3. Si consideri la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ t+1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire i valori di t per i quali A_t è invertibile;
b) per i valori di t per i quali A_t è invertibile calcolare il determinante della matrice $6 \cdot (A_t)^{-2}$;
c) posto $t=2$ calcolare l'inversa di A_t nonché determinare le soluzioni del sistema lineare $\left(A_2\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Si considerino, in $\mathbb{R}^3$, la retta affine $\mathcal{S}$ definita dal sistema lineare $\begin{cases} 3x+3y+z = 2 \\ 2x+y+2z = 2 \end{cases}$ ed il punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\mathcal{H}$ passante per l'origine contenente $\mathcal{S}$;
b) stabilire se $Q \in \mathcal{H}$.

Si consideri $\mathbb{R}^3$ con la struttura naturale di spazio Euclideo.

★**c)** determinare la distanza di Q da $\mathcal{H}$;
★**d)** determinare la proiezione ortogonale $\pi_{\mathcal{H}}(Q)$ del punto Q sul piano $\mathcal{H}$.

Esame di Geometria del giorno 8 settembre 2011

Orali: vedi avviso.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

☐ 5 cfu
☐ 6 cfu

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.
Avviso: gli studenti che sostengono l'esame da **5 cfu** (vecchio ordinamento) **non** sono tenuti a svolgere le domande contrassegnate con l'asterisco.

---

1. Si considerino le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definite dalle relazioni

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad , \qquad g(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 - y_3 - y_4 \\ 3y_2 - y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare basi e dimensioni del nucleo e dell'immagine di f;
b) posto $U = \mathrm{Im} f$ e $W = \ker g$ determinare una base e la dimensione dell'intersezione $U \cap W$;
c) determinare una base dello spazio somma $U + W$ e dire se $U + W$ è somma diretta di U e W (=dire se gli spazi U e W sono indipendenti).

2. Si considerino le trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ associate alle (=rappresentate nella base canonica dalle) matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Stabilire quali trasformazioni sono diagonalizzabili (enunciare in modo chiaro i risultati teorici utilizzati);
b) scegliere una trasformazione diagonalizzabile tra quelle date e determinare una base di autovettori;
c) stabilire quali tra queste trasformazioni hanno almeno 2 autovettori indipendenti.

3. Si consideri la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ t+1 & 11 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire i valori di t per i quali A_t è invertibile;
b) per i valori di t per i quali A_t è invertibile calcolare il determinante della matrice $4 \cdot (A_t)^{-3}$;
c) posto $t = 2$ calcolare l'inversa di A_t nonché determinare le soluzioni del sistema lineare $\left(A_2\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Si considerino, in $\mathbb{R}^3$, la retta affine $\mathcal{S}$ definita dal sistema lineare $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$ ed il punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\mathcal{H}$ passante per l'origine contenente $\mathcal{S}$;
b) stabilire se $Q \in \mathcal{H}$.

Si consideri $\mathbb{R}^3$ con la struttura naturale di spazio Euclideo.

★**c)** determinare la distanza di Q da $\mathcal{H}$;
★**d)** determinare la proiezione ortogonale $\pi_{\mathcal{H}}(Q)$ del punto Q sul piano $\mathcal{H}$.