

Esercizio 1 a) Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ per i quali le seguenti serie convergono.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos(n\pi)\right)^n z^n$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n^2} z^n$

b) Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie converge.
 $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln(n+3) - \ln(n))^n z^n$

Soluzione a,1) Applichiamo il criterio della radice ennesima alla serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos(n\pi)\right)^n |z|^n.$$

Siccome

$${}^n\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \cos(n\pi)\right)^n |z|^n} \leq \frac{3}{2}|z|,$$

se $|z| < \frac{2}{3}$ abbiamo

$${}^n\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \cos(n\pi)\right)^n |z|^n} \leq \frac{3}{2}|z| < 1.$$

Dunque, per il criterio della radice ennesima, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos(n\pi)\right)^n |z|^n$ converge se $|z| < 2/3$. Ne segue che la serie proposta converge assolutamente se $|z| < 2/3$.

Studiamo ora la serie per i valori di z per i quali $|z| \geq \frac{2}{3}$. Se $|z| = 2/3$ la serie proposta non converge. Per mostrarlo facciamo vedere che il limite della successione che genera la serie proposta non è 0. Se tale limite fosse 0 avremmo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left(1 + \frac{1}{2} \cos(n\pi)\right)^n z^n \right| = 0$$

Siccome $|z| = 2/3$ abbiamo

$$\left| \left(1 + \frac{1}{2} \cos(n\pi)\right)^n z^n \right| = \left| \left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n \right|.$$

Per n pari si ha costantemente $\left| \left(1 + \frac{1}{2} \cos(n\pi)\right)^n z^n \right| = 1$, quindi la successione non tende a 0. Perciò la serie proposta non converge per z tale che $|z| = 2/3$.

Ne deduciamo anche se $|z| > 2/3$, la serie proposta non converge. Come abbiamo visto a lezione, se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge per un certo $z \in \mathbb{C}$ allora converge assolutamente per ogni $y \in \mathbb{C}$ tale che $|y - z_0| < |z - z_0|$. Nel nostro caso $z_0 = 0$ e, se la serie proposta convergesse per un qualche z tale che $|z| > 2/3$, essa dovrebbe convergere addirittura assolutamente per $|z| = 2/3$.

Soluzione a,2) Se $|z| = \alpha > 1/4$, la serie non converge perchè la successione $\frac{3+(-1)^n}{n^2} z^n$ non tende a 0. Infatti, se n è pari $\left| \frac{3+(-1)^n}{n^2} z^n \right| = \frac{(4\alpha)^n}{n^2}$ e, siccome $4\alpha > 1$, la sottosuccessione costituita dai termini con indice pari della successione $\left| \frac{3+(-1)^n}{n^2} z^n \right|$ tende a $+\infty$. Quindi la successione $\frac{3+(-1)^n}{n^2} z^n$ non tende a 0 e la serie proposta non converge per z tale che $|z| = \alpha > 1/4$. Se $|z| \leq 1/4$ la serie proposta converge assolutamente per confronto perchè $\left| \frac{3+(-1)^n}{n^2} z^n \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Soluzione b) Troviamo il raggio di convergenza della serie assegnata calcolando il limite della radice ennesima della successione dei moduli dei coefficienti. Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(\ln(n+3) - \ln(n))^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n+3}{n}\right) = 0.$$

Perciò il raggio di convergenza è infinito e la serie proposta converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$, in particolare la serie proposta è convergente per ogni $z \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie converge: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-2)^{n-1}}{n} z^n$.

Soluzione 2) Troviamo il raggio di convergenza della serie assegnata calcolando il limite della radice ennesima della successione dei moduli dei coefficienti. Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + (-2)^{n-1}}{n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n(1 + (-1)^{n-1}(1/2))}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \sqrt[n]{\frac{(1 + (-1)^{n-1}(1/2))}{n}} = 2. \end{aligned}$$

quindi la serie proposta converge assolutamente per tutti numeri reali (e complessi) z di modulo minore di $1/2$, non converge per tutti i numeri reali (e complessi) z di modulo maggiore di $1/2$. (Si noti che in questo caso non avremmo potuto ottenere il raggio di convergenza della serie facendo il limite del rapporto tra l' $n+1$ -esimo e l'ennesimo coefficiente della serie di potenze assegnata. Infatti tale limite non esiste.)

Rimane da vedere cosa succede per $z = 1/2$ e per $z = -1/2$.

Per $z = 1/2$, la serie proposta diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+(-1)^{n-1}(1/2))}{n}$ e diverge per confronto perchè $\frac{(1+(-1)^{n-1}(1/2))}{n} \geq 1/2n$ e la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ diverge.

Per $z = -1/2$, la serie proposta diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 1/2}{n}$. Siccome la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge per il criterio di Leibniz e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/2}{n}$ diverge a + infinito, abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 1/2}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/2}{n} = +\infty.$$

Dunque l'insieme dei numeri reali per cui la serie assegnata converge è $(-1/2, 1/2)$.

Esercizio 3 Determinare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+4i)((n+5)!)^4}{(4n+2)!} z^n$

Soluzione 3) Cerchiamo il raggio di convergenza della serie di potenze assegnata usando il limite del rapporto fra i moduli del coefficiente $n+1$ -esimo ed n -esimo della serie. Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(3+4i)((n+6)!)^4}{(4(n+1)+2)!}}{\frac{(3+4i)((n+5)!)^4}{(4n+2)!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+6)^4}{(4n+6)(4n+5)(4n+4)(4n+3)} = \frac{1}{256}.$$

Il raggio di convergenza della serie proposta è quindi 256.

Esercizio 4 Determinare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze: $\sum_{n=2}^{\infty} (\pi + 2i)^{2n+1} \left(\frac{\ln(n)+1}{\ln(n)}\right)^{n \ln(n)} z^n$

Soluzione 4) Cerchiamo il raggio di convergenza della serie di potenze assegnata usando il limite della radice ennesima della successione dei moduli dei coefficienti della serie. Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| (\pi + 2i)^{2n+1} \left(\frac{\ln(n)+1}{\ln(n)}\right)^{n \ln(n)} \right|} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\pi^2 + 4) \left(\frac{\ln(n)+1}{\ln(n)}\right)^{\ln(n)} \sqrt[n]{\sqrt{\pi^2 + 4}} = (\pi^2 + 4)e.$$

Quindi il raggio di convergenza della serie proposta è $\frac{1}{e\pi^2+4e}$.

Esercizio 5 Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie converge: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x^2 - 3e^{1/3})^{3n+1}$.

Soluzione 5) Riconduciamo lo studio della convergenza della serie proposta a quello della convergenza di una serie di potenze. Abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} (x^2 - 3e^{1/3})^{3n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} (x^2 - 3e^{1/3}) \left((x^2 - 3e^{1/3})^3\right)^n =$$

$$(x^2 - 3e^{1/3}) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} \left((x^2 - 3e^{1/3})^3\right)^n.$$

Dunque la serie proposta converge se e solo se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} \left((x^2 - 3e^{1/3})^3\right)^n$. Studiamo separatamente la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

Siccome

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ converge assolutamente se $|z| < e$ e non converge se $|z| > e$.

Per $z = \pm e$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!(\pm e)^n}{n^n}$. Tale serie non è convergente perchè la successione dei moduli $\frac{n!e^n}{n^n}$ non è infinitesima.

Più precisamente abbiamo

$$\frac{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!e^n}{n^n}} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} > 1,$$

(l'ultima disuguaglianza vale perchè $(\frac{n+1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n$ è monotona crescente e tende ad e come abbiamo visto quando abbiamo introdotto il numero e) quindi $\frac{n!e^n}{n^n}$ è una successione positiva monotona crescente e pertanto non tende a 0.

Riassumendo, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n(e^{2n}-1)} z^n$ converge se e solo se $z \in (-e, e)$.

La serie proposta quindi converge se e solo se $(x^2 - 3e^{1/3})^3 \in (-e, e)$, cioè se e solo se $(x^2 - 3e^{1/3}) \in (-e^{1/3}, e^{1/3})$, ovvero se e soltanto se $x^2 \in (2e^{1/3}, 4e^{1/3})$ e quindi se e solo se

$$x \in (-2e^{1/6}, -\sqrt{2}e^{1/6}) \cup (\sqrt{2}e^{1/6}, 2e^{1/6}).$$

Esercizio 6 Calcolare la parte intera e le prime tre cifre dopo la virgola di

$$\int_0^1 e^{t^2} dt.$$

Soluzione 6) Usiamo l'espressione della funzione e^x come somma del suo polinomio di Taylor centrato in 0 di grado n e del resto in forma di Lagrange. Sappiamo che

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

dove ξ è un numero reale contenuto nell'intervallo aperto avente per estremi 0 e x . Ne segue che

$$e^{t^2} = \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{k!} + \frac{e^{\xi_t}}{(n+1)!} t^{2n+2}$$

dove ξ_t è un numero reale di cui sappiamo solo che $\xi \in (0, t^2)$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{t^2} dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{k!} + \frac{e^{\xi_t}}{(n+1)!} t^{2n+2} dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{k!} dt + \int_0^1 \frac{e^{\xi_t}}{(n+1)!} t^{2n+2} dt = \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{\xi_t}}{(n+1)!} t^{2n+2} dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(2k+1)} + \int_0^1 \frac{e^{\xi_t}}{(n+1)!} t^{2n+2} dt. \end{aligned}$$

Quindi, approssimando $\int_0^1 e^{t^2} dt$ con $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(2k+1)}$ si commette un errore E il cui modulo è pari a $|E| = \left| \int_0^1 \frac{e^{\xi_t}}{(n+1)!} t^{2n+2} dt \right|$. Siccome $\xi_t \in (0, t^2)$ per ogni t e stiamo calcolando l'integrale sull'intervallo $[0, 1]$, otteniamo

$$|E| \leq \left| \int_0^1 \frac{e}{(n+1)!} t^{2n+2} dt \right| < \frac{e}{(n+1)!(2n+3)} x^{2n+3} \Big|_0^1 < \frac{3}{(n+1)!(2n+3)}.$$

Per $n = 6$ otteniamo

$$\int_0^1 e^{t^2} dt = 1 + 1/3 + 1/10 + 1/78 + 1/236 + 1/1320 + 1/9360 + E = 1,4512555.. + E$$

$|E| < \frac{3}{7!15} = \frac{1}{25200}$. Siccome $1,451 < 1,4512555.. - |E| < 1,4512555.. + |E| < 1,452$ la parte intera dell'integrale definito proposto è 1 e le prime tre cifre dopo la virgola sono nell'ordine 4, 5 e 1.

Esercizio 7 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\ln(1+x)}^{\sin(x)} e^{t^2} dt}{\ln(1 + \sqrt{x}) \sin(\sqrt{x^3})}$$

Soluzione 7) Come al solito è sufficiente trovare i polinomi di Taylor non nulli di grado minimo di numeratore e denominatore. Per quanto riguarda il numeratore abbiamo: $\int_{\ln(1+x)}^{\sin(x)} e^{t^2} dt = \int_0^{\sin(x)} e^{t^2} dt - \int_0^{\ln(1+x)} e^{t^2} dt$. Siccome $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in 0 di e^{t^2} è $1 + t^2$. Il polinomio di Taylor di grado 3 centrato in 0 della funzione integrale $\int_0^y e^{t^2}$ è quindi $y + \frac{y^3}{3}$. Ne segue che $\int_0^y e^{t^2} = y + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$ per $y \rightarrow 0$. Siccome $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0$ abbiamo anche

$$\int_0^{\sin(x)} e^{t^2} = \sin(x) + \frac{(\sin(x))^3}{3} + o((\sin(x))^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

e

$$\int_0^{\ln(1+x)} e^{t^2} = \ln(1+x) + \frac{(\ln(1+x))^3}{3} + o((\ln(1+x))^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

Inoltre $\sin(x) = x + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$ e $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$. Sostituendo nella formula precedente otteniamo

$$\int_{\ln(1+x)}^{\sin(x)} e^{t^2} = x + o(x^2) - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Per quanto riguarda il denominatore, usando i limiti notevoli, si trova $\ln(1 + \sqrt{x}) \sin(\sqrt{x^3}) = x^2 + o(x^2)$.

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\ln(1+x)}^{\sin(x)} e^{t^2} dt}{\ln(1 + \sqrt{x}) \sin(\sqrt{x^3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 8 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 11 centrato in 0 della funzione

$$\int_0^x \frac{1}{12t^7 + 9t^3 - 3} dt$$

Soluzione 8) Basterà integrare tra 0 e x il polinomio di Taylor di grado 10 centrato in 0 della funzione $\frac{1}{12t^7 + 9t^3 - 3}$. Si può sempre ricavare il polinomio di Taylor di grado n centrato in 0 di una qualsiasi funzione razionale ben definita in 0 usando la nota relazione

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Nel nostro caso abbiamo

$$\frac{1}{12t^7 + 9t^3 - 3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - (3t^3 + 4t^7)} =$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3} (1 + (3t^3 + 4t^7) + (3t^3 + 4t^7)^2 + (3t^3 - 4t^7)^3 + (3t^3 - 4t^7)^4 + o((3t^3 - 4t^7)^4)) = \\
& -\frac{1}{3} (1 + 3t^3 + 4t^7 + 9t^6 + 24t^{10} + o(t^{10}) + 27t^9 + o(t^{10}) + o(t^{10})) \\
& -\left(\frac{1}{3} + t^3 + \frac{4}{3}t^7 + 9t^9 + 8t^{10}\right) \text{ per } t \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Siccome $\frac{1}{12t^7+9t^3-3}$ è derivabile infinite volte in 0, dall'unicità del polinomio di Taylor si ottiene che $-\left(\frac{1}{3} + t^3 + \frac{4}{3}t^7 + 9t^9 + 8t^{10}\right)$ è il polinomio di Taylor di $\frac{1}{12t^7+9t^3-3}$ centrato in 0. Il polinomio di Taylor di grado 11 della funzione $\int_0^x \frac{1}{12t^7+9t^3-3} dt$ è quindi

$$p(x) = \int_0^x -\left(\frac{1}{3} + t^3 + \frac{4}{3}t^7 + 9t^9 + 8t^{10}\right) dt = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{24}x^8 + \frac{9}{10}x^{10} + \frac{8}{11}x^{11}.$$

Esercizio 9 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{1}{1-3t^3+t^7} - e^{3t^3} dt}{\ln(x^2+1) \sin(\sqrt{x}) \tan(\sqrt{x^9})}$$

Soluzione 9) Occupiamoci prima di trovare il polinomio di Taylor non nullo di grado minimo centrato in 0 del numeratore. Argomentiamo come nel precedente esercizio. siccome

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^2 x^k + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0$$

e $\lim_{t \rightarrow 0} 3t^3 - t^7 = 0$ abbiamo $\frac{1}{1-3t^3+t^7} = 1 + 3t^3 - t^7 + (3t^3 - t^7)^2 + o((3t^3 - t^7)^3) = 1 + 3t^3 + 9t^6 + o(t^6)$ per $t \rightarrow 0$. Inoltre, usando il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in 0 di e^x , otteniamo anche $e^{3t^3} = 1 + 3t^3 + \frac{9}{2}t^6 + o(t^6)$ per $t \rightarrow 0$. Sommando le espressioni ottenute, segue che $\frac{1}{1-3t^3+t^7} - e^{3t^3} = \frac{9}{2}t^6 + o(t^6)$ per $t \rightarrow 0$. Quindi il polinomio di Taylor di grado 6 centrato in 0 di $\frac{1}{1-3t^3+t^7} - e^{3t^3}$ è $\frac{9}{2}t^6$. Conseguentemente il polinomio di Taylor di grado 7 centrato in 0 della funzione integrale $\int_0^x \frac{1}{1-3t^3+t^7} - e^{3t^3} dt$ è $\frac{9}{14}x^7$, da cui

$$\int_0^x \frac{1}{1-3t^3+t^7} - e^{3t^3} dt = \frac{9}{14}x^7 + o(x^7) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Per quanto riguarda il denominatore, usando i limiti notevoli, si trova

$$\ln(x^2+1) \sin(\sqrt{x}) \tan(\sqrt{x^9}) = x^7 + (o(x^7)) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Ne concludiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{1}{1-3t^3+t^7} - e^{3t^3} dt}{\ln(x^2+1) \sin(\sqrt{x}) \tan(\sqrt{x^9})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9}{14}x^7 + o(x^7)}{x^7 + (o(x^7))} = \frac{9}{14}.$$