Premettiamo 2 varianti del criterio del confornto asintotico di uso frequente negli esercizi di studio del carattere delle serie. Le chiameremo osservazione a) e osservazione b).

Osservazione a) Siano a_n e b_n sono successioni reali tali che, definitivamente in n, $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

(L'osservazione a) è vera perchè, se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}$, allora $l \geq 0$ e $\lim_{n\to+\infty} 1 + l - \frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$. Per il teorema della permanenza del segno esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ si ha $1 + l - \frac{a_n}{b_n} > 0$, cioè definitivamente in n si ha $\frac{(1+l)b_n - a_n}{b_n} > 0$. Siccome $b_n > 0$ definitivamente in n abbiamo anche $(1+l)b_n - a_n > 0$ definitivamente in n, cioè $a_n < (1+l)b_n$ definitivamente in n. Poichè $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge anche $\sum_{n=0}^{+\infty}(1+l)b_n$ converge e quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge per il criterio del confronto.)

Osservazione b) Siano a_n e b_n sono successioni reali tali che, definitivamente in n, $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge. (Siccome b_n e a termini definitivamente positivi, se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ non divergesse, allora dovrebbe convergere, ma allora per l'osservazione a) anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergebbe)

Esercizio 1 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 + n^2 e^{-n})$$

Soluzione) Siccome $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n} = 0$ abbiamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n^2e^{-n})}{n^2e^{-n}} = 1$. Siccome $\ln(1 + n^2e^{-n}) > 0$ e $n^2e^{-n} > 0$ per ogni n, per il criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 + n^2e^{-n})$ converge se e soltanto se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^2e^{-n}$ converge. Siccome $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2e^{-n}}{\frac{1}{n^2}} = 0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^2e^{-n}$ converge per l'osservazione a) e dunque la serie proposta converge.

Esercizio 2 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 5n - 3n^3 + 1}{n^4 \ln^2(\sqrt{n}) + n^3 \sin(n)}$$

Soluzione) Siccome

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{n^2+5n-3n^3+1}{n^4 \ln^2(\sqrt{n})+n^3\sin(n)}\right|}{\frac{1}{n\ln^2(n)}} = 12$$

e siccome la serie armonica generalizzata $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}$ converge, la serie proposta converge assoluamente per l'osservazione a).

Esercizio 3 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Soluzione) Siccome $\frac{n!}{n^n} > 0$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e} < 1$$

La serie converge per il criterio del rapporto.

Esercizio 4 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + n}{n^n}$$

Soluzione) Siccome $\frac{n!+n}{n^n} > 0$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!+n+1}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!+n}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} \cdot \frac{1 + \frac{n+1}{(n+1)!}}{1 + \frac{n}{n!}} = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1$$

La serie converge per il criterio del rapporto.

Esercizio 5 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

Soluzione) Siccome $\frac{n^n}{(2n)!} > 0$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{n^n}{(2n)!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n-1)} = e \cdot 0 = 0 < 1$$

La serie converge per il criterio del rapporto.

Esercizio 6 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \ln(n)}{2^n + n!}$$

Soluzione) Siccome $\frac{e^n \ln(n)}{2^n+n!} > 0$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{e^{n+1}\ln(n+1)}{2^{n+1}+(n+1)!}}{\frac{e^n \ln(n)}{2^n+n!}} = e \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{1 + \frac{2^n}{n!}}{1 + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}} = e \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0 < 1$$

la serie converge per il criterio del rapporto.

Esercizio 7 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{\ln(n)}} - 1$$

Soluzione) Siccome $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$ abbiamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{\ln(n)}}-1}{\frac{1}{\ln(n)}} = 1$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{\ln(n)}} - 1}{\frac{1}{\ln(n)}} = 1.$$

Siccome $e^{\frac{1}{\ln(n)}} - 1 > 0$ e la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge, la serie proposta diverge per l'osservazione b).

Esercizio 8 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n^2-1}$$

Soluzione) Siccome

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{\sin(n^2+1)}{n^2-1}\right|}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

e siccome la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la serie proposta converge assolutamente per l'osservazione a).

Esercizio 9 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(n)}{n^2}$$

Soluzione) Siccome $\frac{\ln^2(n)}{n^2} > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln^2(n)}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 0$$

e siccome la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, la serie proposta converge per l'osservazione a).

Esercizio 10 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{10}}{e^{\sqrt{n}}}$$

Soluzione) Siccome $\frac{n^{10}}{e^{\sqrt{n}}} > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^{10}}{e^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{12}}{e^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{12\ln(n)}}{e^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{12\ln(n)-\sqrt{n}} = e^{-\infty} = 0$$

e siccome la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la serie proposta converge per l'osservazione a).

Esercizio 11 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^3 \sin(\frac{1}{n}) - n^2 \right)^{2n+3}$$

Soluzione) Usando il polinomio di Taylor di grado 3 centrato in 0 di $\sin(x)$ abbiamo

$$\sin(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{3!n^3} + o(\frac{1}{n^3}) \; per \; n \to +\infty.$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \sin(\frac{1}{n}) - n^2 = \lim_{n\to+\infty} n^2 - \frac{1}{3!} + o(n) - n^2 = -\frac{1}{6}$$

(si noti che usando il polinomio di Taylor di grado 1 di $\sin(x)$ si sarebbe trovato $n^3 \sin(\frac{1}{n}) - n^2 = o(n)$ che non da alcuna informazione sul limite). Per il teorema della permanenza del segno $n^3 \sin(\frac{1}{n}) - n^2 < 0$ definitivamente in n. e quindi anche $\left(n^3 \sin(\frac{1}{n}) - n^2\right)^{2n+3} < 0$ definitivamente in n. Quindi la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^3 \sin(\frac{1}{n}) - n^2\right)^{2n+3}$ è equivalente alla sua convergenza assoluta.

Siccome

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left| n^3 \sin(\frac{1}{n}) - n^2 \right|^{2n+3}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| n^3 \sin(\frac{1}{n}) - n^2 \right|^2 \sqrt[n]{\left| n^3 \sin(\frac{1}{n}) - n^2 \right|^3} = \frac{1}{36} \cdot 1 = \frac{1}{36} < 1$$

la serie converge assolutamente per il criterio del radice n-esima.

Esercizio 12 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n)$$

Soluzione) La serie non converge perchè la successione $\cos(n)$ non tende a 0. Infatti se $\lim_{n\to+\infty} \cos(n) = 0$ allora anche $\lim_{n\to+\infty} \cos(n+1) = 0$, ma $\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$ e allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n) = \lim_{n\to+\infty} \cos(n) \cdot \frac{\cos(1)}{\sin(1)} - \frac{\cos(n+1)}{\sin(1)} = 0.$$

Questo implicherebbe $\lim_{n\to+\infty} \cos^2(n) + \sin^2(n) = 0$ che è assurdo perchè $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$ (in modo analogo si può vedere che la successione oscilla).

Rimane da vedere se la serie diverge o è irregolare cioè oscilla. Osserviamo che $\cos(n) = Re(e^{in})$, quindi

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(n) = \sum_{k=0}^{n} Re(e^{in}) = Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{in}\right) = Re\left(\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right)$$

(nell'ultima uguaglianza abbiamo usato l'identità $\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \sum_{k=0}^{n} z^k$). Siccome

$$\left|Re\left(\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right)\right| \leq \left|\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right| \leq \frac{|1|+|e^{i(n+1)}|}{|1-e^{i}|} = \frac{2}{|1-e^{i}|}$$

(nella terza disuguaglianza abbiamo usato la disuguaglianza triangolare per numeri complessi).

Ne segue che la successione delle somme parziali

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(n)$$

è limitata e siccome sappiamo già che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n)$ non converge, ne deduciamo che essa oscilla.

Esercizio 13 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

Soluzione) Siccome $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = -1 \neq 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ non converge. Siccome, per lo stesso limite $\frac{1-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} < 0$, definitivamente in n la serie proposta diverge a $-\infty$.

Esercizio 14 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)\left(\arctan(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{2}\right)$$

Soluzione) Abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)\left(\arctan(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\arctan(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(-\arctan(\sqrt{n}) + \frac{\pi}{2}\right)$$

e la serie proposta converge per il criterio di Leibniz. Infatti $-\arctan(\sqrt{n}) + \frac{\pi}{2} > 0$, $\lim_{n\to+\infty} -\arctan(\sqrt{n}) + \frac{\pi}{2} = 0$ e $-\arctan(\sqrt{n}) + \frac{\pi}{2}$ è monotona decrescente perchè le funzioni radice quadrata e arcotangente sono monotone crescenti, quindi anche la loro composizione lo è.

Esercizio 15 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan(n) - \frac{\pi}{2}$$

Soluzione) Siccome la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan(n)$ è a termini positivi essa converge o diverge a $+\infty$. Siccome

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \frac{-\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = 1,$$

per il teorema di De l'Hopital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = 1,$$

quindi anche

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Siccome la serie armonica diverge, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan(n)$$

diverge a $+\infty$ per il teorema del confronto asintotico (o per l'osservazione a)). La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \arctan(n) - \frac{\pi}{2}$ diverge quindi a $-\infty$.

Esercizio 16 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(\ln(n)) - \frac{\pi}{2}$$

Soluzione) Siccome $\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = 1$, anche

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\ln(x)\right)}{\frac{1}{\ln(x)}} = 1.$$

Poichè la serie armonica generalizzata $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge (vedi esercizio 36), la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan x$ diverge per il teorema del confronto asintotico (o per l'osservazione b)). La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(\ln(n)) - \frac{\pi}{2}$ diverge quindi a $-\infty$.

Esercizio 17 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^5 + 3n^4 + 5n^2 + 11}{-n^6 - 7n^5 - 2n + 1}$$

Soluzione) Abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^5+3n^4+5n^2+11}{-n^6-7n^5-2n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^5+3n^4+5n^2+11}{+n^6+7n^5+2n-1}$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^5+3n^4+5n^2+11}{+n^6+7n^5+2n-1}$ converge per il criterio di Leibniz. Infatti $\frac{n^5+3n^4+5n^2+11}{+n^6+7n^5+2n-1} > 0$ definitivamente in n, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5+3n^4+5n^2+11}{+n^6+7n^5+2n-1} = 0$ e infine $\frac{n^5+3n^4+5n^2+11}{+n^6+7n^5+2n-1}$ è definitivamente monotona perchè un rapporto tra due polinomi (Se $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi tali $f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$ non è costante, allora la derivata $f'(x)$ di $\frac{p(x)}{q(x)}$ è ancora un rapporto di polinomi. Se M è il massimo dell'insieme finito costituito dagli zeri di $q(x)$ e $f'(x)$ allora $\frac{p(x)}{q(x)}$ è monotona su $(M, +\infty)$. Ne segue che anche $\frac{p(n)}{q(n)}$ è monotona sui naturali maggiori di M).

Esercizio 18 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{(-1)^n}{\ln(n)} + \frac{1}{n}\right)$$

Soluzione)

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{(-1)^n}{\ln(n)} + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{n}\right).$$

Siccome la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)}$ diverge a $+\infty$ e la serie $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)$ converge per il criterio di Leibniz, la serie proposta diverge a $+\infty$ (confronta con esercizio 39).

Esercizio 19 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\ln(n)}$$

Soluzione)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ln(3^{-\ln(n)})} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\ln(n)\ln(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ln(n^{-\ln(3)})} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln(3)}.$$

Siccome $\ln(3) > 1$ la serie proposta è una serie armonica generalizzata convergente.

Esercizio 20 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ln(n)}$$

Soluzione)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ln((1/2)^{\ln(n)})} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ln(n)\ln(1/2)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ln(n^{\ln(1/2)})} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln(1/2)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln(2)}.$$

Siccome $\ln(2) < 1$ la serie proposta è una serie armonica generalizzata divergente a $+\infty$.

Esercizio 21 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+3}\right)^{n^2\ln(n)}$$

Soluzione I)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+3}\right)^{n^2\ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2}\right)^{\ln(n)}.$$

Siccome $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2} = e^{-3}$ abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-2} - \left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2} = e^{-2} - e^{-3} > 0.$$

Per la permanenza del segno $e^{-2} > \left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2}$ definitivamente in n. Di conseguenza

$$\left(\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2}\right)^{\ln(n)} < \left(e^{-2}\right)^{\ln(n)} = n^{-2}.$$

Siccome la serie proposta è a termini positivi e la serie armonica generalizzata $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2}$ converge, la serie proposta converge per il criterio del confronto. (Si noti che, sebbene in questo caso sia vero che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2}\right)^{\ln(n)}}{(e^{-3})^{\ln(n)}} = 1,$$

ciò non segue dall'identità $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2} = e^{-3}$. Se, in generale, $g(x) \to +\infty$ e $f(x) \to a$ allora non è sempre vero che $\frac{(f(x))^{g(x)}}{a^{g(x)}} \to 1$. Ad esempio se $f(x) = a + \frac{a}{g(x)}$ allora $\frac{(f(x))^{g(x)}}{a^{g(x)}} \to e$.)

Soluzione II)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+3}\right)^{n^2\ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2}\right)^{\ln(n)} =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{\ln(n)\ln\left(\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2}\right)} = \sum_{n=2}^{\infty} n^{\ln\left(\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2}\right)}.$$

Siccome $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2} = -3 < -2$, usando come prima il teorema della permanenza del segno, abbiamo che $\ln\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2} < -2$ definitivamente in n e quindi $n^{\ln\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2}} < n^{-2}$ definitivamente in n. Siccome la serie proposta è a termini positivi e la serie armonica generalizzata $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2}$ converge, la serie proposta converge per il criterio del confronto.
(Anche in questo caso sarebbe stato sbagliato dedurre che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\ln\left(\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2}\right)}}{n^{-3}} = 1,$$

solo per il fatto che $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1-\frac{3}{n^2+3}\right)^{n^2} = -3$. Se, in generale, $g(x)\to a$ e $f(x)\to+\infty$ allora non è sempre vero che $\frac{(f(x))^{g(x)}}{f(x)^a}\to 1$. Ad esempio se $g(x) = a + \frac{1}{\ln f(x)}$ allora $\frac{(f(x))^{g(x)}}{f(x)^a}\to e$.)

Esercizio 22 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2)+n^2}{n^3}$$

Soluzione)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2)}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2)}{n^3}$ converge assolutamente per il criterio del confronto perchè $\left|\frac{\cos(n^2)}{n^3}\right| < \frac{1}{n^3}$. Siccome $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, la serie proposta diverge a $+\infty$.

Esercizio 23 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n^2)+n^2}{\ln^2(n^{n^2}+\sin(n))}$$

Soluzione) Siccome $\frac{\cos(n^2)+n^2}{\ln^2(n^{n^2}+\sin(n))} > 0$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\cos(n^2)+n^2}{\ln^2(n^{n^2}+\sin(n))}}{\frac{1}{n^2\ln(n)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2+o(n^2)}{\ln^2(n^{n^2}+o(n^{n^2}))}}{\frac{1}{n^2\ln(n)}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2+o(n^2)}{\left(\ln(n^{n^2})+\ln(1+o(1))\right)^2}}{\frac{1}{n^2\ln(n)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2+o(n^2)}{\ln^2(n^{n^2})+o(\ln^2(n^{n^2}))}}{\frac{1}{n^2\ln(n)}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2}{\ln^2(n^{n^2})}\cdot\frac{1+o(1)}{1+o(1)}}{\frac{1}{n^2\ln(n)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2}{n^4\ln^2(n)}\cdot\frac{1+o(1)}{1+o(1)}}{\frac{1}{n^2\ln(n)}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2\ln^2(n)}}{\frac{1}{n^2\ln(n)}}\cdot\frac{1+o(1)}{1+o(1)} = 1\cdot 1 = 1$$

e siccome $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln^2(n)}$ converge, la serie proposta converge per l'osservazione a).

Esercizio 24 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n\ln(2^n+n^n)\ln(n)}$$

Soluzione) Abbiamo $\frac{n+\sqrt{n}}{n\ln(2^n+n^n)\ln(n)} > 0$ e $\frac{n+\sqrt{n}}{n\ln(2^n+n^n)\ln(n)} < 2\frac{n}{n^2\ln^2(n)}$. Siccome $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n)}$, la serie proposta converge per il criterio del confronto.

Esercizio 25 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{13n^2-13n^3\sin(\frac{1}{n})}$$

Soluzione) Usando il polinomio di Taylor di grado 3 centrato in 0 di $\sin(x)$ otteniamo

$$\sin(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + o(\frac{1}{n^3}) \textit{ per } n \to +\infty.$$

Di conseguenza

$$\lim_{n\to+\infty} 13n^2 - 13n^3\sin(\frac{1}{n}) = \frac{13}{6} > \frac{25}{12}.$$

Ne segue che $13n^2 - 13n^3\sin(\frac{1}{n}) = \frac{13}{6} > \frac{25}{12}$ definitivamente in n. Allora anche

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{13n^2-13n^3\sin(\frac{1}{n})} < \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{25}{12}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{25}{24}}$$

definitivamente in n. Siccome $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{13n^2-13n^3\sin(\frac{1}{n})} > 0$ e la serie armonica generalizzata $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{25}{24}}$ converge, la serie proposta converge per il criterio del confronto.

Esercizio 26 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{3n+1}{2n}}$$

Soluzione) Siccome $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{2n}=\frac{3}{2}<2$ abbiamo $\frac{3n+1}{2n}<2$ definitivamente in n. Quindi anche

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{3n+1}{2n}}>\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2}=\frac{1}{n}$$

definitivamente in n. Siccome $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{3n+1}{2n}}>0$ e la serie armonica diverge, la serie proposta diverge a $+\infty$ per il criterio del confronto.

Esercizio 27 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln(n^n+1)}{n^2}\right)^{\frac{3n+1}{2n}}$$

Soluzione) Siccome

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln(n^n+1)}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln(n^n)\cdot(1+o(1))}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{5}}}\cdot(1+o(1))=0$$

abbiamo $0<\frac{\ln(n^n+1)}{n^2}<\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}<1$ definitivamente in n. Siccome $\frac{3n+1}{2n}>\frac{3}{2}$ ne deduciamo

$$\left(\frac{\ln(n^n+1)}{n^2}\right)^{\frac{3n+1}{2n}}<\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{n^{\frac{12}{10}}}$$

definitivamente in n. Poichè $\left(\frac{\ln(n^n+1)}{n^2}\right)^{\frac{3n+1}{2n}}>0$ per $n>1$ e la serie arminica generalizzata $\frac{1}{n^{\frac{12}{10}}}$ converge, la serie proposta converge per il criterio del confronto.

Esercizio 28 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln(n^n+1)}{n^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{3n+1}{2n}}$$

Soluzione) Siccome $1>\frac{\ln(n^n+1)}{n^{\frac{5}{4}}}>\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ definitivamente in n e $\frac{3n+1}{2n}<2$, abbiamo anche

$$\left(\frac{\ln(n^n+1)}{n^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{3n+1}{2n}}>\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)^{2}=\frac{1}{n^{1/2}}$$

definitivamente in n. Siccome la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ diverge, la serie proposta diverge a $+\infty$ per il criterio del confronto.

Esercizio 29 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n \ln^2(n)}$$

Soluzione) La serie proposta converge assolutamente. Infatti

$$\left| \frac{\sin(n)}{n \ln^2(n)} \right| \leq \frac{1}{n \ln^2(n)}$$

e, siccome la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n \ln^2(n)} \right|$ converge per il criterio del confronto.

Esercizio 30 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)\right) \arcsin\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}+5}\right)}{\ln(n)}$$

Soluzione) Usando il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in 0 di $\cos(x)$ e i polinomi di Taylor di grado 1 centrati in 0 di $\ln(x)$ e $\arcsin(x)$ otteniamo:

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)\right) = -\frac{1}{2n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) \quad \textit{per } n \to +\infty$$

e

$$\arcsin\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}+5}\right) = \frac{1}{n^{1/3}+5} + o\left(\frac{1}{n^{1/3}+5}\right) \quad \textit{per } n \to +\infty.$$

Inoltre, siccome $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^{1/3}+5}}{\frac{1}{n^{1/3}}} = 1$, abbiamo anche $\frac{1}{n^{1/3}+5} = \frac{1}{n^{1/3}} + o\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)$ per $n \to +\infty$. Ne segue che

$$\arcsin\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{1}{n^{1/3}} + o\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right) \quad \textit{per } n \to +\infty$$

e quindi

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)\right) \arcsin\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}+5}\right) = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \textit{per } n \to +\infty.$$

Con queste informazioni è facile studiare l'ordine di infinitesimo della successione che genera la serie. Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)\right) \arcsin\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}+5}\right)}{\ln(n)}}{\frac{1}{n\ln(n)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{2n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)}{\frac{1}{n\ln(n)}} = -\frac{1}{2}.$$

Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico (oppure l'osservazione b)) alla serie a termini positivi

$$\sum_{n=2}^{\infty} -\frac{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)\right) \arcsin\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}+5}\right)}{\ln(n)}.$$

Siccome $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge, anche la serie $\sum_{n=2}^{\infty} -\frac{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)\right)\arcsin\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}+5}\right)}{\ln(n)}$ diverge a $+\infty$ e la serie proposta diverge a $-\infty$.

Esercizio 31 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^{\sqrt{n}}}{5^n}$$

Soluzione) Siccome

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{10^{\sqrt{n}}}{5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{5} = \frac{1}{5},$$

la serie proposta converge per il criterio della radice ennesima.

Esercizio 32 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)}$$

Soluzione)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

e la serie converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 33 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}\ln(n)}\right)^{\arctan(n)}$$

Soluzione) Poichè $\arctan(n) < \pi/2 < 2$ abbiamo

$$\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}\ln(n)}\right)^{\arctan(n)} > \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}\ln(n)}\right)^{2} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\ln^2(n)}.$$

Siccome $\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}\ln(n)}\right)^{\arctan(n)} > 0$ e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\ln^2(n)}$$

diverge (vedi esercizio 36), la serie proposta diverge a $+\infty$.

Esercizio 34 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\ln(n)}\right)^{\arctan(n)}$$

Soluzione) Siccome $\lim_{n\to+\infty} \arctan n = \pi/2 > \frac{31}{20}$, si ha $\arctan(n) > \frac{31}{20}$ definitivamente in n. Ne segue che

$$\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\ln(n)}\right)^{\arctan(n)} < \left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\ln(n)}\right)^{\frac{31}{20}} = \frac{1}{n^{\frac{31}{30}}}$$

defintivamente in n. Siccome $\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\ln(n)}\right)^{\arctan(n)} > 0$ per $n > 2$ e siccome la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{31}{30}}}$ converge, allora la serie proposta converge per il criterio del confronto.

Esercizio 35 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{3}})\ln(n - \ln(n))}\right)^{\arctan(n)}$$

Soluzione) Siccome

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{1}{3}})\ln(n-\ln(n))}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}} = 0$$

si ha $\frac{1}{(n^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{1}{3}})\ln(n-\ln(n))} < \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ definitivamente in n. Siccome

$$\lim_{n\to+\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2} > \frac{31}{20}$$

si ha $\arctan(n) > \frac{31}{20}$ defintivamente in n. Ne segue che

$$\left(\frac{1}{(n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{3}})\ln(n - \ln(n))}\right)^{\arctan(n)} < \left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{31}{20}} = \frac{1}{n^{\frac{31}{30}}}$$

definitivamente in n. Siccome $\left(\frac{1}{(n^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{1}{3}})\ln(n-\ln(n))}\right)^{\arctan(n)} > 0$ e la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{31}{30}}}$ converge, allora la serie proposta converge per il criterio del confronto.

Esercizio 36 Determinare i valori dei parametri reali α e β per i quali la seguente serie converge:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}\ln^{\alpha}(n)}$$

Soluzione) Dalla teoria sappiamo che

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}}$ converge se $\beta > 1$ e diverge se $\beta \leq 1$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{\alpha}(n)}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

Se $\beta > 1$ e α è un qualsiasi numero reale la serie proposta è convergente.
Infatti esiste β' tale che $\beta > \beta' > 1$ e, per 1), $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta'}}$ converge. Siccome le serie proposte sono tutte a valori positivi e $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^{\beta}\ln^{\alpha}(n)}}{\frac{1}{n^{\beta'}}} = 0$, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}\ln^{\alpha}(n)}$ converge per l'osservazione a).
Se $\beta < 1$ e α è un qualsiasi numero reale la serie proposta è divergente.
Infatti esiste β' tale che $\beta < \beta' < 1$ e, per 1), $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta'}}$ diverge. Siccome le serie proposte sono tutte a valori positivi e $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^{\beta'}}}{\frac{1}{n^{\beta}\ln^{\alpha}(n)}} = 0$, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}\ln^{\alpha}(n)}$ diverge per l'osservazione b).
Il caso rimanente in cui $\beta = 1$ e α è un qualsiasi numero reale è trattato in 2).

Esercizio 37 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+2\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}$$

Soluzione) Siccome $\lim_{n\to+\infty} 1 + 2\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 1$, si potrebbe essere portati a credere che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{1+2\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}}{\frac{1}{n}} = 1$ e che, quindi, la serie proposta diverga. Entrambe queste sffermazioni sono errate. Infatti

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1+2\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n^{2\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}}\right) = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{e^{2\ln(n)\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}}\right)$$

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{e^{2\ln(\ln(n))}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(e^{\ln(\ln(n))})^2} = \frac{1}{n\ln^2(n)}$$

Qunidi la serie proposta converge.
(Osserviamo che se $\lim_{n\to+\infty} f(n) = a \neq 0$ allora, come visto nell'esercizio 21, non possiamo concludere che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{f(n)}}{\frac{1}{n^{a}}} = 1 \neq 0$. Tuttavia $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{f(n)}$ converge se $a > 1$ e diverge se $a < 1$. Per vederlo, nel caso $a > 1$ si può confrontare con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{b}}$ dove $a > b > 1$. Per vederlo, nel caso $a < 1$ si può confrontare con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{b}}$ dove $a < b < 1$.)

Esercizio 38 a) Determinare i valori del parametro reale α per i quali la seguente serie converge:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n\ln(n)}$$

Soluzione) Cerchiamo di applicare il criterio del confronto asintotico, confrontando con le serie armoniche generalizzate $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}}$. Usando il polinomio di Taylor di grado 2 di $\ln(1 + x)$ otteniamo

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n\ln(n)} = e^{n\ln(n)\ln(1+\frac{\alpha}{n})} =$$

$$e^{n\ln(n)\left(\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{\alpha\frac{n\ln(n)}{n}-\frac{\alpha^2 n\ln(n)}{2n^2}+o\left(\frac{n\ln(n)}{n^2}\right)} =$$
$$e^{\alpha\ln(n)+o(1)}\ per\ n \to +\infty.$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n\ln(n)}}{\frac{1}{n^\beta}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\alpha\ln(n)+o(1)}}{e^{-\beta\ln(n)}} =$$
$$\lim_{n\to+\infty} e^{\ln(n)(\alpha+\beta)+o(1)}.$$

Se $\alpha=-\beta$ il precedente limite è 1. Siccome la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n\ln(n)}$$

è a termini positivi, per il criterio del confronto asintotico essa converge se e soltanto se $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{-\alpha}}$ converge, cioè se e soltanto se $\alpha<-1$.

Esercizio 38 b Determinare il valori del parametro reale α per i quali la seguente serie converge:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+\alpha}{n+\pi}\right)^{n\ln(n)}$$

Soluzione) Cerchiamo di applicare il criterio del confronto asintotico, confrontando con le serie armoniche generalizzate $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^\beta}$. Dobbiamo quindi valutare il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{n+\alpha}{n+\pi}\right)^{n\ln(n)}}{\frac{1}{n^\beta}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n\ln(n)\ln\left(\frac{n+\alpha}{n+\pi}\right)}}{e^{-\beta\ln(n)}} =$$
$$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(n)\ln\left(\frac{n+\alpha}{n+\pi}\right)+\beta\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(n)\ln\left(1+\frac{\alpha-\pi}{n+\pi}\right)+\beta\ln(n)}.$$

Usando il polinomio di Taylor di grado 2 di $\ln(1+x)$ centrato in 0, abbiamo

$$\ln\left(1+\frac{\alpha-\pi}{n+\pi}\right) = \frac{\alpha-\pi}{n+\pi}-\frac{(\alpha-\pi)^2}{2(n+\pi)^2}+o\left(\frac{1}{(n+\pi)^2}\right)$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(n)\ln\left(1+\frac{\alpha-\pi}{n+\pi}\right)+\beta\ln(n) =$$
$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(n)\left(\frac{\alpha-\pi}{n+\pi}-\frac{(\alpha-\pi)^2}{2(n+\pi)^2}+o\left(\frac{1}{(n+\pi)^2}\right)\right)+\beta\ln(n) =$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\alpha-\pi)n\ln(n)}{n+\pi}-\frac{(\alpha-\pi)^2 n\ln(n)}{2(n+\pi)^2}+o\left(\frac{n\ln(n)}{(n+\pi)^2}\right)+\beta\ln(n) =$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\alpha-\pi+\beta)n\ln(n)+\pi\beta\ln(n)}{n+\pi}-\frac{(\alpha-\pi)^2 n\ln(n)}{2(n+\pi)^2}+o\left(\frac{n\ln(n)}{(n+\pi)^2}\right) =$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\alpha-\pi+\beta)n\ln(n)+\pi\beta\ln(n)}{n+\pi}+o(1).$$

Tale limite è 0 se $\beta = \pi - \alpha$, è $+\infty$ se $\beta > \pi - \alpha$ ed è $-\infty$ se $\beta < \pi - \alpha$. Ne segue che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{n+\alpha}{n+\pi}\right)^{n\ln(n)}}{\frac{1}{n^\beta}} = 1$ se e soltanto se $\beta = \pi - \alpha$. Siccome la serie proposta è definitivamente a termini positivi, per il criterio del confronto asintotico, essa converge se e soltanto se $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi-\alpha}}$ converge, cioè se e soltanto se $\pi - \alpha > 1$, cioè

$$\alpha < \pi - 1$$

Esercizio 38 c Determinare i valori del parametro reale α per i quali la seguente serie converge:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}} \ln(n)} \right)^{\alpha \arctan(n)}.$$

Soluzione) Cerchiamo di applicare il criterio del confronto asintotico, confrontando con le serie armoniche generalizzate $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\beta \ln^\gamma n}$.

Siccome $\lim_{n\to+\infty} \arctan(n) = \pi/2$ è ragionevole aspettarsi che le successioni

$$\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}} \ln(n)} \right)^{\alpha \arctan(n)} = \frac{1}{n^{\alpha \arctan(n) \frac{2}{3}} \ln^{\alpha \arctan(n)}(n)}$$

e

$$\frac{1}{n^{\frac{\alpha\pi}{3}} \ln^{\frac{\alpha\pi}{2}}(n)}$$

abbiano lo stesso ordine di infinitesimo. Tuttavia, come già sottolineato, potrebbe non esser vero, quindi dobbiamo verificarlo calcolando il limite del loro rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}} \ln(n)} \right)^{\alpha \arctan(n)}}{\frac{1}{n^{\frac{\alpha\pi}{3}} \ln^{\frac{\alpha\pi}{2}}(n)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^{\alpha \arctan(n) \frac{2}{3}} \ln^{\alpha \arctan(n)}(n)}}{\frac{1}{n^{\frac{\alpha\pi}{3}} \ln^{\frac{\alpha\pi}{2}}(n)}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2\alpha}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)} \ln^{\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)}(n) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2\alpha}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)\ln(n)} e^{\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)\ln(\ln(n))}.$$

Come ben noto, applicando il teorema di De L'Hopital si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{\frac{1}{x}} = 1$$

e di conseguenza

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(n) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quindi il nostro limite diventa

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2\alpha}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)\ln(n)} e^{\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)\ln(\ln(n))} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2\alpha}{3}\left(\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)} e^{\alpha\left(\frac{\ln(\ln(n))}{n} + o\left(\frac{\ln(\ln(n))}{n}\right)\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{o(1)} e^{o(1)} = 1.$$

Siccome la serie proposta è a termini positivi essa converge se e solo se la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha\pi}{3}} \ln^{\frac{\alpha\pi}{2}}(n)}$$

converge e quest'ultima converge se e soltanto se $\alpha \geq \frac{3}{\pi}$ (vedi esercizio 36).

Esercizio 39 Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Dopo aver osservato che

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

e che $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ è una successione a valori positivi, discutere il risultato ottenuto in relazione al criterio di Leibniz.
Dopo aver osservato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1$$

e che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge per il criterio di Leibniz, discutere il risultato ottenuto in relazione al criterio del confronto asintotico.

Soluzione) Siccome la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge per il criterio di Leibniz e la serie armonica diverge, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

Il criterio di Leibniz dice che se $\{a_n\}$ è tale che

1. $a_n \geq 0$ definitivamente in n
2. $a_{n+1} < a_n$ definitivamente in n
3. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente.

La successione $\{a_n\} = \{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right)\}$ è positiva e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ ma non è definitivamente monotona, quindi non possiamo usare il criterio di Leibniz per concludere che $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ converge (infatti abbiamo appena dimostrato che diverge!). Il fatto che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ diverga mostra che l'ipotesi di monotonia ($a_{n+1} < a_n$ definitivamente in n) non può essere rimossa nel criterio di Leibniz.

Il criterio del confronto asintotico dice che se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono successioni tali che

1. $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente in n
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge (diverge) se e soltanto se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge (diverge).

Le successioni $\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\}$ e $= \{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\}$ sono tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1$$

ma non è vero che $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \geq 0$ e $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} > 0$ definitivamente in n.

Quindi non possiamo usare il criterio de confronto asintotico per concludere che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ converge se e soltanto se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (infatti abbiamo visto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ diverge mentre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge per il criterio di Leibniz).

Il fatto che le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ abbiano caratteri diversi dimostra che l'ipotesi di positività ($a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente in n) non può essere rimossa nel criterio del confronto asintotico.