

Esercizio 1 Calcolare l'area del sottoinsieme di \mathbb{C} definito dalla disequazione $(z\bar{z})^4 - 3(z\bar{z})^2 - 2 \leq 0$

Soluzione) $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ soddisfa la disequazione data se e solo se $\rho^8 - 3\rho^4 - 2 \leq 0$. La disequazione $x^8 - 3x^4 - 2 \leq 0$ è soddisfatta per $x \in [\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}]$. Dunque

$$\rho^8 - 3\rho^4 - 2 \leq 0 \iff \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \leq \rho^4 \leq \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

e poichè $\rho^4 \geq 0$

$$\frac{3 - \sqrt{17}}{2} \leq \rho^4 \leq \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \iff 0 \leq \rho^4 \leq \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

infine, siccome $\rho \in \mathbb{R}$ e $\rho \geq 0$

$$0 \leq \rho^4 \leq \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \iff 0 \leq \rho \leq \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)^{1/4}.$$

Il sottoinsieme di \mathbb{C} definito dalla disequazione $(z\bar{z})^4 - 3(z\bar{z})^2 - 2 \leq 0$ è dunque il cerchio centrato nell'origine di raggio $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{1/4}$. La sua area è $\pi \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{1/2}$.

Esercizio 2 Trovare il perimetro del poligono convesso i cui vertici sono le soluzioni in \mathbb{C} dell'equazione $z^6 = e + \pi i$.

Soluzione) Come abbiamo visto a lezione le radici n-esime di un qualsiasi numero complesso di modulo ρ costituiscono i vertici di un n-agono regolare inscritto in una circonferenza di raggio $\rho^{1/n}$. Nel caso in questione le soluzioni di $z^6 = e + \pi i$ costituiscono i vertici di un esagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio $(e^2 + \pi^2)^{1/12}$. Siccome i lati di un esagono regolare hanno la stessa lunghezza del raggio del cerchi in cui l'esagono è inscritto, il perimetro cercato è $6(e^2 + \pi^2)^{1/12}$.

Esercizio 3 Trovare l'area del poligono convesso i cui vertici sono le soluzioni in \mathbb{C} dell'equazione $(z + 4 + 2i)^4 = \sqrt{7} - i$.

Soluzione) Il numero complesso α è soluzione di $(z + 4 + 2i)^4 = \sqrt{7} - i$ se e soltanto se $\alpha + 4 + 2i$ è soluzione di $(z)^4 = \sqrt{7} - i$, cioè le soluzioni di $(z + 4 + 2i)^4 = \sqrt{7} - i$ si ottengono da quelle di $(z)^4 = \sqrt{7} - i$ sottraendo $4 + 2i$. Siccome le soluzioni di $(z)^4 = \sqrt{7} - i$ sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di raggio $|7 - i|$ con centro nell'origine, le soluzioni di $(z + 4 + 2i)^4 = \sqrt{7} - i$ sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di raggio $|7 - i| = \sqrt{50}$ e centro $-4 - 2i$. L'area di ogni quadrato inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt{50}$ è 100.

Esercizio 4 Trovare le soluzioni in \mathbb{C} delle equazioni $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ e $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

Soluzione) Occupiamoci prima dell'equazione $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Occorre ricordare che $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$. Le soluzioni di $z^5 - 1 = 0$ sono le radici quinte dell'unità, cioè $1, e^{\frac{2\pi i}{5}}, e^{\frac{4\pi i}{5}}, e^{\frac{6\pi i}{5}}, e^{\frac{8\pi i}{5}}$. Di queste soluzioni solo la prima annulla il fattore $z - 1$ della decomposizione $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$, quindi le altre 4 dovranno annullare il fattore $(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$. Le soluzioni di $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ sono perciò $e^{\frac{2\pi i}{5}}, e^{\frac{4\pi i}{5}}, e^{\frac{6\pi i}{5}}, e^{\frac{8\pi i}{5}}$.

Per trovare le soluzioni dell'equazione $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, occorre osservare che $z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$. Le soluzioni di $z^5 + 1 = 0$ sono $-1, -e^{\frac{2\pi i}{5}}, -e^{\frac{4\pi i}{5}}, -e^{\frac{6\pi i}{5}}, -e^{\frac{8\pi i}{5}}$ e analogamente al caso precedente si vede che, siccome -1 è soluzione di $z + 1 = 0$, allora le soluzioni dell'equazione $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ sono $-e^{\frac{2\pi i}{5}}, -e^{\frac{4\pi i}{5}}, -e^{\frac{6\pi i}{5}}, -e^{\frac{8\pi i}{5}}$.

Esercizio 5 Trovare il minimo dell'insieme

$$\{|z - w| : z, w \in \mathbb{C}, |z - 2 + i| \leq 1, |w - 6 + 8i| \leq 2\}.$$

Soluzione) Gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - 2 + i| \leq 1$ descrivono il cerchio di centro $2 - i$ e raggio 1. I w tali che $|w - 6 + 8i| \leq 2$ descrivono il cerchio di centro $6 - 8i$ e raggio 2. Il minimo dell'insieme proposto è la minima distanza tra un punto del primo cerchio e un punto del secondo cerchio. Il valore cercato è la distanza tra i centri dei cerchi meno la somma dei raggi. Nel nostro caso la distanza tra i centri è $|4 - 7i| = \sqrt{65}$ e il valore cercato è $\sqrt{65} - 3$.

Esercizio 6 Sia $p(z) = z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ un polinomio a coefficienti reali ($a_i \in \mathbb{R}$). Assumendo che i numeri complessi $e + i$ e $1 + i\pi$ siano soluzioni dell'equazione $p(z) = 0$, determinare i coefficienti a_i .

Suggerimento: usare il teorema fondamentale dell'algebra e $\overline{\overline{a}b} = a\overline{b}$.

Soluzione) Se il numero complesso α è soluzione dell'equazione $p(z) = z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$ allora anche il suo coniugato $\overline{\alpha}$ è soluzione della medesima equazione. Infatti se

$$\alpha^4 + a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$

allora coniugando entrambi i membri dell'equazione otteniamo

$$\overline{\alpha^4 + a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0} = 0.$$

Siccome $\overline{\overline{a} + b} = \overline{a} + \overline{b}$ e $\overline{\overline{a}b} = a\overline{b}$ abbiamo

$$0 = \overline{\alpha^4 + a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0} = \overline{\alpha}^4 + \overline{a_3}\overline{\alpha}^3 + \overline{a_2}\overline{\alpha}^2 + \overline{a_1}\overline{\alpha} + \overline{a_0}.$$

Siccome $a_i \in \mathbb{R}$ abbiamo $\overline{a_i} = a_i$ e quindi

$$0 = \overline{\alpha}^4 + \overline{a_3}\overline{\alpha}^3 + \overline{a_2}\overline{\alpha}^2 + \overline{a_1}\overline{\alpha} + \overline{a_0} = \overline{\alpha}^4 + a_3\overline{\alpha}^3 + a_2\overline{\alpha}^2 + a_1\overline{\alpha} + a_0.$$

cioè $\overline{\alpha}$ è soluzione di $z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$ (questo argomento mostra che se $p(z)$ è polinomio a coefficienti reale e α è soluzione di $p(z) = 0$, allora anche $\overline{\alpha}$ è soluzione dell'equazione $p(z) = 0$).

Nel nostro caso, poichè $e + i$ e $1 + i\pi$ sono soluzioni dell'equazione polinomiale a coefficienti reali $p(z) = 0$, anche i loro coniugati $e - i$ e $1 - i\pi$ sono soluzioni della

medesima equazione. Siccome $p(z)$ ha grado 4 i numeri $e+i$, $1+i\pi$, $e-i$ e $1-i\pi$ sono tutte le soluzioni dell'equazione $p(z) = 0$. Per il teorema fondamentale dell'algebra abbiamo

$$p(z) = (z - (e+i))(z - (e-i))(z - (1+i\pi))(z - (1-i\pi)) = \\ (z^2 - 2ez + e^2 + 1)(z^2 - 2z + \pi^2 + 1) = \\ z^4 + (-2e-2)z^3 + (\pi^2 + e^2 + 4e+2)z^2 + (-2e\pi^2 - 2e - 2e^2 - 2)z + e^2\pi^2 + e^2 + \pi^2 + 1.$$

Se ne deduce $a_3 = -2e - 2$, $a_2 = \pi^2 + e^2 + 4e + 2$, $a_1 = -2e\pi^2 - 2e - 2e^2 - 2$ e $a_0 = e^2\pi^2 + e^2 + \pi^2 + 1$.

Esercizio 7 Disegnare sul piano complesso l'insieme degli z soddisfacenti l'equazione $|z - 3| = |z + 2i - 5|$.

Soluzione) $|z - 3|$ è la distanza del numero complesso z dal numero complesso 3. $|z + 2i - 5|$ è la distanza del numero complesso z dal numero complesso $5 - 2i$. L'insieme degli z soddisfacenti l'equazione $|z - 3| = |z + 2i - 5|$ è il luogo geometrico dei punti del piano complesso equidistanti da 3 e $5 - 2i$, cioè l'asse del segmento passante per i punti 3 e $5 - 2i$ o equivalentemente la retta perpendicolare al segmento dato passante per il suo punto medio. Prendendo come coordinate sul piano complesso $x = Re(z)$ e $y = Im(z)$ il luogo che dobbiamo disegnare è la retta $y = x - 5$.

Esercizio 8 Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 - \bar{z}(i - 1) = 0$

Soluzione) L'equazione è equivalente a $z^3 = \bar{z}(i - 1)$. Passiamo alla forma esponenziale ponendo $z = \rho e^{i\theta}$. Siccome $i - 1 = \sqrt{2}e^{i\frac{4}{3}\pi}$, z è soluzione di $z^3 - \bar{z}(i - 1) = 0$ se e soltanto se

$$\rho^3 e^{i3\theta} = \rho e^{-i\theta} \sqrt{2} e^{i\frac{4}{3}\pi}.$$

Eguagliando i moduli dei due membri dell'equazione otteniamo che affinché z sia soluzione deve essere $\rho^3 = \sqrt{2}\rho$. Questa ultima equazione ha solo due soluzioni non negative: $\rho = 0$ e $\rho = 2^{1/4}$. Prendendo $\rho = 0$ otteniamo la soluzione $z = 0$ dell'equazione iniziale. Se $\rho = 2^{1/4}$ il numero $z = \rho e^{i\theta}$ è soluzione di $z^3 - \bar{z}(i - 1) = 0$ se e solo se $e^{i3\theta} = e^{-i(\theta + \frac{4}{3}\pi)}$ cioè se e solo se $e^{i(4\theta + \frac{4}{3}\pi)} = 1$. Equivalentemente, se $\rho = 2^{1/4}$ il numero $z = \rho e^{i\theta}$ è soluzione di $z^3 - \bar{z}(i - 1) = 0$ se e solo se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $4\theta + \frac{4}{3}\pi = 2k\pi$ cioè $\theta = -\frac{1}{3}\pi + \frac{k}{2}\pi$. I valori di θ distinti a meno di multipli interi di 2π che si ottengono sono: $-\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, e $\frac{7}{6}\pi$. Le soluzioni dell'equazione iniziale sono allora:

$$0, 2^{1/4}e^{-i\frac{1}{3}\pi}, 2^{1/4}e^{i\frac{1}{6}\pi}, 2^{1/4}e^{i\frac{2}{3}\pi}, 2^{1/4}e^{i\frac{7}{6}\pi},$$

cioè

$$0, \frac{1}{2^{3/4}} - i\frac{\sqrt{3}}{2^{3/4}}, \frac{\sqrt{3}}{2^{3/4}} + i\frac{1}{2^{3/4}}, -\frac{1}{2^{3/4}} + i\frac{\sqrt{3}}{2^{3/4}}, -\frac{\sqrt{3}}{2^{3/4}} - i\frac{1}{2^{3/4}}.$$

Esercizio 9 Studiare la convergenza delle seguenti successioni a valori complessi:

$$\begin{aligned} & \{e^{i\frac{3n\pi}{4}}\} \\ & \{e^{in}\} \\ & \{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n^2(e^{\frac{1}{n}} - 1) + i(e^{2n} \ln(1 + \frac{1}{e^n}) - e^{2n}(e^{\frac{1}{e^n}} - 1))\} \\ & \{(3 + 2i)\frac{e^{in}}{\sqrt{n}}\} \end{aligned}$$

Soluzioni) La successione $a_n = \{e^{i\frac{3n\pi}{4}}\}$ oscilla.

Per mostrarlo basta esibire due sottosuccessioni che tendono a limiti diversi. La sottosuccessione $\{a_{8n}\} = \{e^{i6n\pi}\}$ è la successione costante uguale a 1, il suo limite è 1. La sottosuccessione $\{a_{8n+4}\} = \{e^{i(6n+1)\pi}\}$ è la successione costante uguale a -1 , il suo limite è -1 .

La successione $\{b_n\} = \{e^{in}\}$ oscilla.

Per mostrarlo facciamo vedere che essa non diverge e non converge. Siccome $\lim_{n \rightarrow +\infty} |e^{in}| = 1 \neq +\infty$ la successione non diverge. Per mostrare che $\{b_n\}$ non converge osserviamo che, se $\{b_n\}$ converge al numero complesso b , allora anche la sottosuccessione $\{b_{n+1}\}$ converge a $\{b\}$. Quindi, per la proposizione sul calcolo dei limiti,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} - b_n = b - b = 0.$$

Usando una delle definizioni equivalenti di limite di successione a valori complessi, abbiamo allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |b_{n+1} - b_n| = 0.$$

Nel nostro caso

$$|b_{n+1} - b_n| = |e^{i(n+1)} - e^{in}| = |e^{in}(e^i - 1)| = |e^{in}||e^i - 1| = |(e^i - 1)|,$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |b_{n+1} - b_n| = |(e^i - 1)| \neq 0$$

e la successione $\{b_n\}$ non converge.

La successione

$$\{c_n\} = \{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n^2(e^{\frac{1}{n}} - 1) + i(e^{2n} \ln(1 + \frac{1}{e^n}) - e^{2n}(e^{\frac{1}{e^n}} - 1))\}$$

converge a $-1 - i$. Per mostrarlo facciamo vedere che $\{Re(c_n)\}$ converge a -1 e $\{Im(c_n)\}$ converge a -1 .

Mostriamo prima che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Re(c_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = -1.$$

Siccome $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, usando i polinomi di Taylor di grado 2 centrati in 0 di e^x e $\ln(1+x)$ otteniamo

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

e

$$e^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Quindi

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - n^2 \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - n^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(-\frac{1}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + o(1) = -1. \end{aligned}$$

Si noti che usando i polinomi di Taylor di grado 1 di e^x e $\ln(1+x)$ avremmo solo potuto concludere che $Re(c_n) = o(n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e questo non ci da nessuna informazione su $\lim_{n \rightarrow +\infty} Re(c_n)$.

Mostriamo ora che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Im(c_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n} \ln \left(1 + \frac{1}{e^n} \right) - e^{2n} \left(e^{\frac{1}{e^n}} - 1 \right) = -1.$$

Analogamente a prima, siccome $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$, usando i polinomi di Taylor di grado 2 centrati in 0 di e^x e $\ln(1+x)$ otteniamo

$$\ln \left(1 + \frac{1}{e^n} \right) = \frac{1}{e^n} - \frac{1}{2e^{2n}} + o \left(\frac{1}{e^{2n}} \right) \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

e

$$e^{\frac{1}{e^n}} = \frac{1}{e^n} + \frac{1}{2e^{2n}} + o \left(\frac{1}{e^{2n}} \right) \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Quindi

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n} \ln \left(1 + \frac{1}{e^n} \right) - e^{2n} \left(e^{\frac{1}{e^n}} - 1 \right) = \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n} \left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{2e^{2n}} + o \left(\frac{1}{e^{2n}} \right) \right) - e^{2n} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{2e^{2n}} + o \left(\frac{1}{e^{2n}} \right) \right) = \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n} \left(-\frac{1}{e^{2n}} + o \left(\frac{1}{e^{2n}} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + o(1) = -1. \end{aligned}$$

Anche in questo caso, usando i polinomi di Taylor di grado 1 di e^x e $\ln(1+x)$ avremmo solo potuto concludere che $Im(c_n) = o(e^n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e siccome $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = +\infty$ questo non ci da nessuna informazione su $\lim_{n \rightarrow +\infty} Re(c_n)$.

La successione $\{d_n\} = \{(3+2i)\frac{e^{in}}{\sqrt{n}}\}$ converge a 0.

Per dimostrarlo, verifichiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} |d_n| = 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} |d_n| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |(3+2i)\frac{e^{in}}{\sqrt{n}}| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |(3+2i)| \frac{|e^{in}|}{|\sqrt{n}|} = \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|(3+2i)|}{|\sqrt{n}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{13}}{|\sqrt{n}|} = 0. \end{aligned}$$

Esercizio 10 Calcolare le somme delle seguenti serie:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{10^{3k+1}}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k k}$
3. $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^{2k-8}}{(k-4)!}$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^{3k+1}}{(2k+1)!}$

Soluzione)

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{10^{3k+1}} = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{10^{3k}} = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{1000^k} = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{1000} \right)^k =$$

$$\frac{1}{10} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{1000} \right)^k - 1 \right) = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{1 - \frac{5}{1000}} - 1 \right) = \frac{1}{10} \left(\frac{1000}{995} - 1 \right) = \frac{1}{10} \left(\frac{5}{995} \right) = \frac{1}{1990}$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(-\frac{1}{5}\right)^k}{k} =$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(-\frac{1}{5}\right)^k}{k} = -\ln \left(1 - \frac{1}{5} \right) = -\ln \left(\frac{4}{5} \right) = \ln \left(\frac{5}{4} \right)$$

$$3) \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^{k-4} 5^{2k-8}}{(k-4)!} = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^{k-4} \cdot 25^{k-4}}{(k-4)!} =$$

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-25)^{k-4}}{(k-4)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-25)^k}{k!} = e^{-25}$$

$$4) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^{3k+1}}{(2k+1)!} = 5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^{3k}}{(2k+1)!} = 5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (5^{3/2})^{2k}}{(2k+1)!} =$$

$$\frac{5}{5^{3/2}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (5^{3/2})^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sin(5\sqrt{5})}{\sqrt{5}}$$

Esercizio 11 Calcolare nell'ordine dato le somme delle seguenti serie:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!}$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 - k}{k!}$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k (3k^2 + 2k + 4)}{k!}$

Suggerimento: $k^2 - k = k(k-1)$, $0! = 1$.

Soluzione)

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

$$2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 - k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

$$3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 - k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = e + e = 2e.$$

4) Ogni polinomio $p(k)$ di grado n nella variabile k può essere scritto nella forma

$$p(k) = a_n(k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-n))$$

$$+ a_{n-1}(k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-n+1)) + \cdots + a_2(k(k-1)) + a_1k + a_0$$

e questo consente il calcolo delle serie del tipo $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(p(k))}{k!}$. Vediamolo nel caso della serie dell'esercizio. Abbiamo $3k^2 + 2k + 4 = 3(k(k-1)) + 5k + 4$, quindi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k(3k^2 + 2k + 4)}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k(3(k(k-1)) + 5k + 4)}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 5^k(k(k-1))}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 5^k \cdot k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 5^k}{k!} = \\ &= 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k(k(k-1))}{k!} + 5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k \cdot k}{k!} + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} \\ &= 3 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^k}{(k-2)!} + 5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{(k-1)!} + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} = \\ &= 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^{k+2}}{k!} + 5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^{k+1}}{k!} + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} = \\ &= 3 \cdot 5^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} + 5^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!} + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} = \\ &= 3 \cdot 5^2 \cdot e^5 + 5^2 \cdot e^5 + 4 \cdot e^5 = 104 \cdot e^5. \end{aligned}$$

Esercizio 12 Usando la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, esprimere in forma di frazione fra numeri interi i seguenti numeri reali periodici:

1) $12, \overline{13}$

2) $4, \overline{3}$

3) $4, 2\overline{3}$

Soluzione

$$\begin{aligned}
1) \quad 12, \overline{13} &= 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{13}{100} = 12 + 13 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100} = \\
&= 12 + 13 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{100} - 1 \right) = 12 + 13 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} - 1 \right) = \\
&= 12 + 13 \left(\frac{100}{99} - 1 \right) = 12 + 13 \left(\frac{1}{99} \right) = 12 + \frac{13}{99} = \frac{1201}{99}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad 4, \overline{3} &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10} = 4 + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10} = \\
&= 4 + 3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10} - 1 \right) = 4 + 3 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = \\
&= 4 + 3 \left(\frac{10}{9} - 1 \right) = 4 + 3 \left(\frac{1}{9} \right) = 4 + 3 \left(\frac{1}{9} \right) = \frac{39}{9} = \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad 4, 2\overline{3} &= 4, 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{10} = \frac{42}{10} + 3 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{10} = \frac{42}{10} + 3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10} - 1 - \frac{1}{10} \right) = \\
&= \frac{42}{10} + 3 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{42}{10} + 3 \left(\frac{10}{9} - 1 - \frac{1}{10} \right) = \\
&= \frac{42}{10} + 3 \left(\frac{1}{90} \right) = \frac{42}{10} + \frac{1}{30} = \frac{127}{30}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che, in generale, la forma come rapporto di due interi del numero periodico

$$0, \overline{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$$

è

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}{99 \cdots 9}$$

dove al denominatore c'è un numero costituito da n cifre tutte uguali a 9. Infatti

$$\begin{aligned}
0, \overline{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}{(10^n)^k} = \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(10^n)^k} = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(10^n)^k} - 1 \right) = \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} - 1 \right) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \left(\frac{1}{10^n - 1} \right) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}{99 \cdots 9}.
\end{aligned}$$

Da questa osservazione si ricava facilmente la regola di trasformazione di un qualsiasi numero periodico in un rapporto di numeri interi. Ad esempio

$$4, 1\overline{7} = \frac{41}{10} + 0, 0\overline{7} = \frac{41}{10} + \frac{1}{10} \cdot 0\overline{7} = \frac{41}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{376}{90} = \frac{188}{45}.$$