

Esercizio 1 Sia $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, sia $V_1 := \{M \in M_{3,3}(\mathbb{R}) : v \in \text{Im}(L_M)\}$ e sia

$$V_2 := \{M \in M_{3,3}(\mathbb{R}) : v \in \text{Ker}(L_M)\}.$$
¹

1) Per $i = 1, 2$ stabilire se V_i è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbb{R})$.

2) Per $i = 1, 2$, se V_i è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbb{R})$, calcolarne la dimensione.

1) V_1 non è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbb{R})$ perché la matrice nulla non appartiene a V_1 . Infatti l'applicazione lineare associata alla matrice nulla è l'applicazione lineare nulla e $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non appartiene all'immagine dell'applicazione lineare nulla.

V_2 è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbb{R})$.

Infatti, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in V_2$

2) Se $M, N \in V_2$ allora $M+N \in V_2$.

Infatti $(M+N)v = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distributività} \\ \text{p.d.t. matrici}}}{Mv + Nv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\nwarrow M, N \in V_2$

e quindi $v \in \text{Ker}(L_{M+N})$ e $M+N \in V_2$

3) Se $a \in \mathbb{R}$ e $M \in V$ allora $aM \in V_2$.

Infatti $(aM)v = a(Mv) = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v \in \text{Ker}(L_{aM})$

cioè $aM \in V_2$.

2) La funzione $\varphi: M_{3,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $\varphi(M) = Mv$ $\forall M \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

è un'applicazione lineare.

Infatti se $M, N \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\varphi(aM + bN) = (aM + bN)v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distributività} \\ \text{p.d.t. matrici}}}{=} aMv + bNv = a\varphi(M) + b\varphi(N).$$

Inoltre φ è suriettiva perché $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e

$\text{Ker}(\varphi) = V_2$. Siccome $\dim M_{3,3}(\mathbb{R}) = 9$ si ha

$$\dim V_2 = \dim \text{Ker } \varphi = \dim M_{3,3}(\mathbb{R}) - \dim(\mathbb{R}^3) = 9 - 3 = 6$$

¹ $\text{Im}(L_M)$ e $\text{Ker}(L_M)$ sono rispettivamente immagine e nucleo dell'applicazione lineare associata alla matrice M

Esercizio 2 a) Per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $\phi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che
 $\phi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$, $\phi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ e $\phi \left(\begin{pmatrix} 7+t \\ 7 \\ 7-t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 5-t \end{pmatrix}$.

b) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ per cui ϕ_t esiste, calcolare la dimensione del suo nucleo.

a) Non esistono $t \in \mathbb{R}$ per i quali $\exists \phi_t$ con le desiderate proprietà.

$$\text{Siccome } \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7+t \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 7-t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t$$

i 3 vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7+t \\ 7 \\ 7-t \end{pmatrix}$ non sono sempre indipendenti.

Siccome $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono indipendenti esistono a_t e $b_t \in \mathbb{R} \neq 0$ c.

$$a_t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b_t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+t \\ 7 \\ 7-t \end{pmatrix}. \text{ Risolvendo il sistema con eliminazione}$$

$$\text{di Gauss si trova } a_t = -t \text{ e } b_t = 7+2t.$$

Se ϕ_t esiste deve essere

$$\phi_t \begin{pmatrix} 7+t \\ 7 \\ 7-t \end{pmatrix} = \phi_t \left(-t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (7+2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -t \phi_t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (7+2t) \phi_t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$-t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2t-1 \end{pmatrix} + (7+2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2+2t+7 \\ t+7 \\ 8t \end{pmatrix} \text{ e per ciò deve}$$

$$\text{essere } \begin{pmatrix} -t^2+2t+7 \\ t+7 \\ 8t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 5-t \end{pmatrix}. \text{ Dalla seconda coordinata}$$

si deduce $t = -6$ e dalla terza $t = \frac{5}{8}$.

Quindi ϕ_t non esiste per nessun $t \in \mathbb{R}$.

Nome e cognome dello studente:

Esercizio 3 Sia $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e sia $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. a) Per $i = 1, 2$ esiste

una matrice invertibile $M_i \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $M_i^{-1} A_i M_i$ è diagonale?

b) Se una tale M_i esiste, esibire un esempio.

a) Non ~~esiste~~ esiste M_1 tale che $M_1^{-1} A_1 M_1$ è diagonale.

In effetti si ha
$$P_{A_1}(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 1 & -2-x & 1 \\ 1 & -1 & -x \end{pmatrix} = (1-x)((-2-x)(-x) + 1) + (-1)(1+2+x)$$

$$= (1-x)(x^2 + 2x + 1) - 1(1+x) = -x^3 - 2x^2 - x + x^2 + 2x + 1 - x - 1 = -x^3 - x^2 = -x^2(x+1).$$

Gli autovalori sono 0 con molteplicità algebrica 2 e -1 con molteplicità algebrica 1. Per mostrare che M_1 non esiste basta far vedere

che $\text{mg}(0) = 1 \neq \text{mg}(-1)$.

Si ha $\text{mg}(0) = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 2$.

Esiste M_2 t.c. $M_2^{-1} A_2 M_2$ è diagonale.

In effetti si ha
$$P_{A_2}(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 3-x \end{pmatrix} = (1-x)(2-x)(3-x) - 1 \cdot 0$$

$$= (1-x)(2-x)(3-x).$$

Quindi L_{A_2} ammette 3 autovalori distinti e perciò è diagonalizzabile e esiste M_2 t.c. $M_2^{-1} A_2 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) ~~Si ha che~~ L'auto spazio relativo all'autovalore 1 per L_{A_2} è

$$V_1 = \text{Sol} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

L'auto spazio relativo all'autovalore 2 per L_{A_2} è

$$V_2 = \text{Sol} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

L'auto spazio relativo all'autovalore 3 per L_{A_2} è

$$V_3 = \text{Sol} \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ponendo $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ si ha $M_2^{-1} A_2 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4 Sia $M \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcolare $M - M^t$.
- b) Calcolare la minima dimensione di un sottospazio vettoriale $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tale $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ e $L_M(V) \subseteq V$.

c) $M - M^t = 0$.

Osserviamo che $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{st} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{st} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{st} = 0$ e

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ $\langle, \rangle_{st}$

fatta di autovettri per L_M . Quindi (per l'implazione facile del teorema spettrale)

L_M è un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^3$ $\langle, \rangle_{st}$.

Siccome M è la matrice rappresentativa di L_M rispetto a base ortonormale canonica di $\mathbb{R}^3$, si ha che M è simmetrica e $M - M^t = 0$.

- b) La dimensione cercata è 3. L'unico sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^3$ tale che $L_M(V) \subseteq V$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ è tutto $\mathbb{R}^3$.

Si ha $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Quindi $L_M(v) = L_M \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

e $L_M(L_M(v)) = L_M \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ -4 \end{pmatrix}$

Se $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ e $L_M(V) \subseteq V$ si ha $V \supseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, L_M \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, L_M(L_M \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}) \right\rangle$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Siccome $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 17 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \det \begin{pmatrix} 26 \\ 712 \\ -4 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 12 \\ 37 \end{pmatrix} = -8 - 4 = -12 \neq 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ -4 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ e $V = \mathbb{R}^3$.