

Nome e cognome dello studente:

Esercizio 1) Nello spazio euclideo di dimensione 3 usuale, sia r il sottospazio affine di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 4x+y-2z=3 \end{cases}$ e sia s il sottospazio affine di equazioni cartesiane $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x+4y-3z=3 \end{cases}$. Determinare le dimensioni di r e s e calcolare la distanza tra r e s .

Siccome $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 2$ e $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 2$

r e s sono ^{affini} spazi affini di dimensione $3-2=1$ dello spazio affine 3-dimensionale usuale.

Per trovare equazioni parametriche di r si può risolvere il sistema lineare $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 4x+y-2z=3 \end{cases}$ oppure osservare che $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in r$

e la direzione di r è perpendicolare a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Quindi la direzione di r è generata da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Si conclude che $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$.

In modo simile si osserva che $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in s$ e la direzione di s è generata da $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Perciò $s = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle$.

Siccome s e r hanno la stessa direzione esse sono parallele.

Infine si ha



e la distanza cercata è pari all'area del parallelogramma diviso $\|v\|$ cioè $\text{dist}(r, s) = \frac{\|(Q-P) \wedge v\|}{\|v\|} = \frac{\|(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\|}{\|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\|} = \dots$

$$\dots = \frac{\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\|}{\|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\|} = \frac{\|\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}\|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}}$$

Esercizio 2) a) Per ogni $t \in \mathbb{R}$, discutere la diagonalizzabilità dell'applicazione lineare $L_{A_t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ associata alla matrice $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ t & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

b) Per ogni $t \in \mathbb{C}$, discutere la diagonalizzabilità dell'applicazione lineare $L_{A_t} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ associata alla matrice $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ t & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$.

c) $L_{A_t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è diagonalizzabile se e solo se $t \in (-\frac{1}{4}, +\infty]$
cioè $t > -\frac{1}{4}$.

Infatti si ha $P_{A_t}(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 4 \\ t & 3-x \end{pmatrix} = (1-x)(3-x) - 4t = \dots$
 $\dots = x^2 - 4x + 3 - 4t$.

Siccome le soluzioni complesse di $P_{A_t}(x) = 0$ sono date da $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3 + 4t} = 2 \pm \sqrt{1 + 4t}$, abbiamo i seguenti casi:

1) Se $t > -\frac{1}{4}$, L_{A_t} ha 2 autovalori distinti e L_{A_t} è diagonalizzabile.
 2) Se $t < -\frac{1}{4}$, L_{A_t} non ammette autovalori (reali!) e

L_{A_t} non è diagonalizzabile.

3) Se $t = -\frac{1}{4}$ ha come unico autovalore 2 e $\text{me}(2) = 2$.

Siccome $\text{mg}(2) = 2 - \text{rg} \begin{pmatrix} 1-2 & 4 \\ \frac{1}{4} & 3-2 \end{pmatrix} = 2 - \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 2$

$L_{A_{-\frac{1}{4}}}$ non è diagonalizzabile.

b) $L_{A_t} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ è diagonalizzabile se e solo se $t \neq -\frac{1}{4}$.

Anche in questo caso $P_{A_t}(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 4 \\ t & 3-x \end{pmatrix} = x^2 - 4x + 3 - 4t$.

Per ogni $t \in \mathbb{C}$ $t \neq -\frac{1}{4}$, l'equazione $P_{A_t}(x) = 0$ ha 2 soluzioni distinte $2 + \sqrt{1+4t}$ e $2 - \sqrt{1+4t}$.

Perciò se $t \neq -\frac{1}{4}$, L_{A_t} ha 2 autovalori distinti ed è

diagonalizzabile. Se $t = -\frac{1}{4}$, $L_{A_t} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ ammette 2

come unico autovalore e $\text{me}(2) = 2$.

Ma $\text{mg}(2) = 2 - \text{rg} \begin{pmatrix} 1-2 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1-2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq \text{me}(2)$:

perciò $L_{A_{-\frac{1}{4}}} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ non è diagonalizzabile.

Nome e cognome dello studente:

Esercizio 3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo $\mathbb{R}$ e sia $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un prodotto scalare su V . Sia $w \in V$ e sia $\phi: V \rightarrow V$ l'applicazione lineare definita ponendo $\phi(v) := 3v + \langle v, w \rangle w$.

I) Discutere la diagonalizzabilità di ϕ .

II) Assumendo che $\|w\| = 2$, calcolare il determinante di ϕ .

I) ϕ è diagonalizzabile.

Per il teorema spettrale basta mostrare che ϕ è simmetrico rispetto al prodotto scalare $\langle, \rangle$, cioè basta mostrare che $\forall v_1, v_2 \in V$ si ha $\langle \phi(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, \phi(v_2) \rangle$.

$$\text{Ma } \langle \phi(v_1), v_2 \rangle = \langle 3v_1 + \langle v_1, w \rangle w, v_2 \rangle = \langle 3v_1, v_2 \rangle + \langle \langle v_1, w \rangle w, v_2 \rangle = \dots$$

$$\dots = 3\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, w \rangle \langle w, v_2 \rangle \quad \text{e}$$

$$\langle v_1, \phi(v_2) \rangle = \langle v_1, 3v_2 + \langle v_2, w \rangle w \rangle = \langle v_1, 3v_2 \rangle + \langle v_1, \langle v_2, w \rangle w \rangle =$$

$$\dots = 3\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, w \rangle \langle v_1, w \rangle = 3\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, w \rangle \langle w, v_2 \rangle.$$

Det $\phi = 63$.

II) Siccome $\|w\| = 2 \neq 0$, w non è il vettore nullo.

Allora $\dim \langle w \rangle^\perp = \dim V - 1 = 2$.

Sia $\{v_1, v_2\}$ una base ortogonale di $\langle w \rangle^\perp$.

(l'esistenza di una tale base si è assicurata da Gram Schmidt).

~~v_1~~ v_1 e v_2 e w sono 3 vettori e 2 e 2 perpendicolari di V :

Quindi sono linearmente indipendenti e $B = \{v_1, v_2, v_3 := w\}$ costituisce una base di V .

$$\text{Si ha } \begin{aligned} \phi(v_1) &= 3v_1 + \langle v_1, w \rangle w = 3v_1 \\ \phi(v_2) &= 3v_2 + \langle v_2, w \rangle w = 3v_2 \end{aligned} \quad \leftarrow \begin{aligned} \text{perché } \langle v_1, w \rangle &= \\ \langle v_2, w \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\phi(v_3) = \phi(w) = 3w + \langle w, w \rangle w = 3w + 4w = 7w = 7v_3$$

perché $\|w\| = 2$.

$$\text{Ne segue che } M(\phi)_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e } \det(\phi) := \det(M(\phi)_B) = 3^2 \cdot 7 = 63$$

Esercizio 4)i) Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ una matrice il cui polinomio caratteristico ammette n soluzioni complesse distinte. Sia $B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ una qualsiasi matrice tale che $AB = BA$.

i) Si può dedurre che B è diagonalizzabile?

ii) Sia $C \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica con esattamente 3 autovalori. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale

$$W_C := \{D \in M_{4,4}(\mathbb{R}) : CD = DC\} \subseteq M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

i) Si. Mostriamo più precisamente che ogni autovettore per L_A è anche autovettore per L_B e quindi viceversa: se B è diagonalizzabile, L_B è anche base di autovettori per L_A .

Sia $v \in V$ autovettore per L_A con autovalore λ .

$$\text{Si ha } L_A(L_B(v)) = ABv = BA v = B(\lambda v) = \lambda Bv = \lambda L_B(v).$$

Quindi $L_B(v)$ appartiene all'autospazio V_λ relativo all'autovalore λ per L_A . Ma siccome L_A ha n autovalori distinti, si ha

$\dim(V_\lambda) = 1$ e $V_\lambda = \langle v \rangle$. Perciò $L_B(v)$ è un multiplo di v e v è anche autovettore per L_B .

ii) Osservazione: Se $B, D \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e $L_C: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile allora: $(D=DC) \Leftrightarrow L_D(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$

$\forall \lambda$ autovalore per L_C
e V_λ autospazio relativo
a λ per L_C

$\Rightarrow$ Se $v \in V_\lambda$ si ha $L_C(L_D(v)) = CDv = DCv = D\lambda v = \lambda Dv = L_D(v)$
perciò $L_D(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.

$\Leftarrow$ Basta mostrare che $L_C L_D = L_D L_C$ e siccome L_C ammette base di autovettori, basta mostrare che $\forall$ autovettore v di L_C si ha $L_C(L_D(v)) = L_D(L_C(v))$. Ma $L_C(L_D(v)) = \lambda L_D(v)$ perché $L_D(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ e $L_D(L_C(v)) = L_D(\lambda v) = \lambda L_D(v)$ poiché $v \in V_\lambda$.

Siccome C è simmetrica, L_C è diagonalizzabile. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ i 3 autovalori. Sappiamo che esiste una base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di autovettori per L_C e possiamo supporre $v_1, v_2 \in V_a$, $v_3 \in V_b$, $v_4 \in V_c$.

Per l'osservazione $D \in W_C \Leftrightarrow L_D(V_a) \subseteq V_a$, $L_D(V_b) \subseteq V_b$ e $L_D(V_c) \subseteq V_c$.

Cioè $D \in W_C \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $L_D(v_1) = x_1 v_1 + x_2 v_2$, $L_D(v_2) = y_1 v_1 + y_2 v_2$,
 $L_D(v_3) = z_1 v_3$, $L_D(v_4) = z_2 v_4$.

Esercizio 4) i) Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ una matrice il cui polinomio caratteristico ammette n soluzioni complesse distinte. Sia $B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ una qualsiasi matrice tale che $AB = BA$. Si può dedurre che B è diagonalizzabile?

ii) Sia $C \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica con esattamente 3 autovalori. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale

$$W_C := \{D \in M_{4,4}(\mathbb{R}) : CD = DC\} \subseteq M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

Quindi $D \in W_C \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, y_1, y_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad M(L_D)_B^B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{pmatrix}$.

L'insieme $V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2, y_1, y_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 6 di $M_{4,4}(\mathbb{R})$ e abbiamo dimostrato che

$$D \in W_C \Leftrightarrow M(L_D)_B^B \in V.$$

Come abbiamo visto e lezione, la funzione $\varphi: M_{4,4}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{4,4}(\mathbb{R})$ definita ponendo $\varphi(M) := M(L_M)_B^B \quad \forall M \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Siccome $\varphi(W_C) = V$ si ha $\dim(W_C) = \dim V = 6$.