Esame di Geometria I (21 Febbraio 2020)

Nome e cognome dello studente: 1

Esercizio 1 Nello spazio euclideo di dimensione 3 usuale sia r la retta passante per i punti $p := \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ e $q := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$ sia π_s il piano di equazione cartesiana $2x + 4y + sz = 1$. •) Trovare equazioni cartesiane per r e, ⁞) per ogni $s \in \mathbb{R}$, calcolare la distanza tra r e π_s.

•) Un sistema di equazioni cartesiane per r è $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+z=5 \end{cases}$.

La retta r contiene $p=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ e ha giacitura $V=\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$.

Perciò un punto $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dello spazio euclideo ordinario appartiene ad r

$$\iff \begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-1\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle \iff rg\begin{pmatrix}x-2 & -1\\ y-1 & 1\\ z-1 & 2\end{pmatrix} = 1 \iff \begin{cases} \det\begin{pmatrix}x-2 & -1\\ y-1 & 1\end{pmatrix}=0 \\ \det\begin{pmatrix}x-2 & -1\\ y-1 & 2\end{pmatrix}=0 \\ \det\begin{pmatrix}y-1 & 1\\ z-1 & 2\end{pmatrix}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-2+y-1=0 \\ 2(x-2)+z-1=0 \\ 2(y-1)-(z-1)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+z=5 \\ 2y-z=1 \end{cases}$$

Siccome la terza equazione dell'ultimo sistema si ottiene sottraendo ~~sottraendo~~ membro a membro la seconda equazione dal doppio della prima, un sistema di equazioni cartesiane per r è $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+z=5 \end{cases}$

⁞) Si ha $\operatorname{dist}(r,\pi_s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq -1 \\ \frac{\sqrt{21}}{7} & \text{se } s=-1 \end{cases}$.

Se r non è parallela a π_s, cioè se la giacitura di r non è inclusa nella giacitura di π_s, l'intersezione $\pi_s \cap r$ è non vuota e $\operatorname{dist}(r,\pi_s)=0$.

Siccome se $2(-1)+4\cdot1+s\cdot2 \neq 0$, cioè se $s\neq -1$, il vettore $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ non appartiene alla giacitura di π_s si ha $\operatorname{dist}(r,\pi_s)=0$ se $s\neq-1$.

Se invece $s=-1$, r è parallela a π_s e la distanza di r da π_{-1} è pari alla distanza di un qualsiasi punto di r da π_{-1}.

Si trova $\operatorname{dist}(r,\pi_{-1}) = \operatorname{dist}(p,\pi_{-1}) = \dfrac{|4-(2\cdot2+4\cdot1-1\cdot1)|}{\sqrt{2^2+4^2+1^2}} = \ldots$

$$\ldots = \frac{|4-7|}{\sqrt{21}} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Esercizio 2) Sia $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ e sia $\phi : M_{3,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita ponendo $\phi(M) := BM$ per ogni $M \in M_{3,2}(\mathbb{R})$. Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di ϕ.

Una base del nucleo di ϕ è $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= v_2} \right\}$.

Una base dell'immagine di ϕ è $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= w_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= w_4} \right\}$.

Infatti $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} \phi$ se e solo se $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a - e = 0 \\ b - f = 0 \\ a + c + 2e = 0 \\ b + d + 2f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e \\ b = f \\ a + c + 2a = 0 \\ b + d + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e \\ b = f \\ c = -3a \\ d = -3b \end{cases}$$

Quindi $\operatorname{Ker} \phi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3a & -3b \\ a & b \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \right\}$

Cioè $\operatorname{Ker} \phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= v_2} \right\}$ è base di $\operatorname{Ker} \phi$.

Di conseguenza $\dim(\operatorname{Im} \phi) = \dim M_{3,2}(\mathbb{R}) - \dim(\operatorname{Ker} \phi) = 6 - 2 = 4$.

Siccome $\operatorname{Im} \phi \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\dim M_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$ si ha $\operatorname{Im} \phi = M_{2,2}(\mathbb{R})$. Quindi una qualsiasi base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ è anche base di $\operatorname{Im} \phi$: in particolare

$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= w_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= w_4} \right\}$ è base di $\operatorname{Im} \phi$.

Nome e cognome dello studente:

Esercizio 3 Sia $A := \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ e sia $L : M_{2,2}\mathbb{R} \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita ponendo $L(M) := AM$ per ogni $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Discutere la diagonalizzabilità di L e, se L è diagonalizzabile, trovare una base di autovettori per L.

L è diagonalizzabile. Una base di autovettori per L è costituita da $\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}} \right\}$.

Costruiamo la matrice rappresentativa di L rispetto alla base $\mathcal{B}$ i cui elementi sono, nell'ordine dato, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Siccome $L\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, la I^a colonna è $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$.

Siccome $L\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, la II^a colonna è $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$.

Siccome $L\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, la III^a colonna è $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$.

Siccome $L\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, la IV^a colonna è $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$.

Perciò la matrice rappresentativa cercata è $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 2\end{pmatrix} =: N$ e L è diagonalizzabile se e solo se lo è la matrice N.

Sia $p_L(x) = p_N(x) = \det\begin{pmatrix}1-x & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-x & 0 & 0\\ 3 & 0 & 2-x & 0\\ 0 & 3 & 0 & 2-x\end{pmatrix} = (1-x)^2(2-x)^2$.

Quindi L e N hanno come autovalori 1 e 2, entrambi con molteplicità algebrica 2.

L'autospazio di autovalore 1 per N è lo spazio delle soluzioni di $\begin{pmatrix}1-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 2-1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 2-1\end{pmatrix} X = 0$, cioè $Sol\begin{pmatrix}3x_1 + x_3 = 0\\ 3x_2 + x_4 = 0\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -3\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ -3\end{pmatrix} \right\rangle$.

Quindi una base per l'autospazio di L di autovalore 1 è costituita da $C_{\mathcal{B}}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -3\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$ e $C_{\mathcal{B}}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$. L'autospazio di autovalore 2 per N è $Sol\begin{pmatrix}-x_1 = 0\\ -x_2 = 0\\ 3x_1 = 0\\ 3x_2 = 0\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \right\rangle$. Perciò una base per l'autospazio di autovalore 2 per L è costituita da $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Quindi $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è base di autovettori per L.

Esercizio 4 a) Trovare una matrice $M \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $M\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix}$ e $M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$. b) Quante sono le matrici M come nel punto a) che inoltre soddisfano $Tr(M)=11$? c) Quante sono le matrici simmetriche $S \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tali che $S\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix}$, $Tr(S)=11$ e $Det(S)=45$?

a) Si può prendere $M=\begin{pmatrix}0&0&5/2\\0&3&1\\0&0&5\end{pmatrix}$. Siccome $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$, esiste unica applicazione lineare $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tale che $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix}$.

Siccome $\forall L \in Hom(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ esiste $M \in M_3(\mathbb{R})$ t.c. $L=L_M$, deve esistere M tale che $M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ e $M\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix}$.

Per trovare M osserviamo che, ~~che~~ siccome $M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ e $M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ si ha $M^1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ e $M^2=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$. Dunque M è della forma $M=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&3&b\\0&0&c\end{pmatrix}$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$. Imponendo $M\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix}$ si trova $a=\frac{5}{2}$ $b=1$ $c=5$.

b) Le matrici $M\in M_{33}(\mathbb{R})$ t.c. $M\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ e $Tr(M)=11$ sono infinite.

Infatti, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $L_\alpha:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tale che $L_\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\\alpha\\0\end{pmatrix}$ $L_\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ $L_\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix}$.

La matrice rappresentativa di L_α rispetto alla base $B=\{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}},\underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}},\underset{v_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}\}$ è $N_\alpha=\begin{pmatrix}3&0&0\\\alpha&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$: perciò $Tr(N_\alpha)=Tr(L_\alpha)=3+3+5=11$.

Ciascuna delle applicazioni lineari L_α è la moltiplicazione per una matrice $M_\alpha\in M_{33}(\mathbb{R})$ e tale M_α soddisfa $Tr(M_\alpha)=Tr(L_\alpha)=11$ $M_\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\\alpha\\0\end{pmatrix}$ $M_\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$. Siccome $M_{\alpha_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\neq M_{\alpha_2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ se $\alpha_1\neq\alpha_2$, le M_α sono infinite.

c) $\exists!\ S\in M_{33}(\mathbb{R})$ simmetrica tale che $S\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix}$ $Tr(S)=11$ $Det(S)=45$.

Le matrici S cercate sono tante quanti gli endomorfismi φ di $\mathbb{R}^3$ simmetrici rispetto al prodotto scalare standard tali che $\varphi\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix}$, $Det(\varphi)=45$ e $Tr(\varphi)=11$.

Sia φ un tale endomorfismo simmetrico, poniamo $w_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Siccome $\varphi\left(<\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}>\right)\subseteq<\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}>$ e φ è simmetrico si ha $\varphi(<w_1>^\perp)\subseteq<w_1>^\perp$.

Inoltre $\varphi_{|<w_1>^\perp}:<w_1>^\perp\to<w_1>^\perp$ è ancora simmetrico e quindi diagonalizzabile.

Siano λ_1 e λ_2 gli autovalori di $\varphi_{|<w_1>^\perp}$.

Siccome $\mathrm{Tr}\,\varphi=11$ e $\varphi\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ si ha $11=5+\lambda_1+\lambda_2$, cioè $\lambda_1+\lambda_2=6$.

Siccome $\mathrm{Det}\,\varphi=45$ e $\varphi\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ si ha $45=5\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2$, cioè $\lambda_1\cdot\lambda_2=9$

Per le espressioni $\lambda_1+\lambda_2=6$ e $\lambda_1\cdot\lambda_2=9$ si ottiene $\lambda_1=\lambda_2=3$.

Cioè la restrizione $\varphi_{|<w_1>^\perp}:<w_1>^\perp\to<w_1>^\perp$ è la moltiplicazione per 3.

Siano ora w_2 e w_3 vettori ~~indipendenti~~ ortonormali in $<w_1>^\perp$.

Siccome w_1 w_2 e w_3 sono indipendenti, essi costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

Abbiamo visto che se esiste $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ simmetrico rispetto al prodotto scalare standard, esso deve soddisfare $\varphi(w_1)=5w_1$ $\varphi(w_2)=3w_2$ e $\varphi(w_3)=3w_3$.

Siccome w_1,w_2,w_3 è base di $\mathbb{R}^3$ esiste unico φ ~~che~~ tale che

$\varphi(w_1)=5w_1$, $\varphi(w_2)=3w_2$ $\varphi(w_3)=3w_3$. Infine si ha per questo φ,

$\det(\varphi)=5\cdot3\cdot3=45$ e $\mathrm{Tr}\,\varphi=3+3+5=11$ e φ è simmetrico

perché $\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|},\frac{w_2}{\|w_2\|},\frac{w_3}{\|w_3\|}\right\}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ $<\ >_{st}$.