

Esercizio 1 Trovare il polinomio di Taylor di grado 5 centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

Soluzione) siccome $f(x)$ è derivabile infinite volte in 0, per l'unicità del polinomio di Taylor, basta trovare un polinomio $p(x)$ di grado minore o uguale a 5 tale che

$$f(x) = p(x) + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Usiamo i polinomi di Taylor di grado 5 centrati in 0 delle funzioni $\cos(x)$ e $\frac{1}{1-x}$. Abbiamo

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Siccome

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} - o(x^5) = 0$$

otteniamo anche

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} - o(x^5)\right)} = \\ &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} - o(x^5)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} - o(x^5)\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} - o(x^5)\right)^3 + \\ &\quad \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} - o(x^5)\right)^4 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} - o(x^5)\right)^5 + o\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} - o(x^5)\right) = \\ &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}\right) + \frac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor cercato è dunque $p(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24}$

Esercizio 2 Trovare il polinomio di Taylor di grado 4 centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\sin(x)}$

Soluzione) Abbiamo

$$f(x) = e^{\sin(x) \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}.$$

Siccome $f(x)$ è derivabile infinite volte in 0, per l'unicità del polinomio di Taylor, basta trovare un polinomio $p(x)$ di grado minore o uguale a 5 tale che

$$f(x) = p(x) + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Per trovare tale polinomio usiamo i polinomi di Taylor di $\sin(x)$, $\ln(1+x)$ e e^x . Per usare il polinomio di Taylor di $\ln(1+x)$ abbiamo bisogno che il suo argomento tenda a 1, mentre nel nostro caso $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x+2} = 1/2$. Per aggirare questo problema osserviamo che

$$\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{2\left(\frac{x}{2}+1\right)}\right) = \ln(1+x) - \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right).$$

Usando il polinomio di Taylor di grado 4 di $\ln(1+x)$ centrato in 0 otteniamo:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) &= \ln(1+x) - \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^5) - \ln(2) - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} - \frac{x^3}{3 \cdot 8} + \frac{x^4}{4 \cdot 16} + o(x^4) = \\ -\ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{24}x^3 - \frac{15}{64}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\sin(x) \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) &= \\ \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \cdot \left(-\ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{24}x^3 - \frac{15}{64}x^4 + o(x^4)\right) &= \\ -\ln(2)x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^3 + \frac{7}{24}x^4 + o(x^4) + \ln(2)\frac{x^3}{3!} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{3!} + o(x^4) &= \\ -\ln(2)x + \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{\ln(2)}{6} - \frac{3}{8}\right)x^3 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Siccome

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\ln(2)x + \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{\ln(2)}{6} - \frac{3}{8}\right)x^3 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) = 0,$$

usando il polinomio di Taylor di grado 4 centrato in 0 di e^x , otteniamo

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\sin(x)} &= e^{-\ln(2)x + \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{\ln(2)}{6} - \frac{3}{8}\right)x^3 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)} = \\ \sum_{k=0}^4 \frac{\left(-\ln(2)x + \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{\ln(2)}{6} - \frac{3}{8}\right)x^3 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right)^k}{k!} + & \\ o\left(\left(-\ln(2)x + \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{\ln(2)}{6} - \frac{3}{8}\right)x^3 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right)^4\right) &= \\ 1 + \left(-\ln(2)x + \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{\ln(2)}{6} - \frac{3}{8}\right)x^3 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right) + & \\ \left(\frac{\ln^2(2)}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{\ln(2)}{2}x^3 - \left(\frac{\ln^2(2)}{6} - \frac{3\ln(2)}{8}\right)x^4 + o(x^4)\right) + & \\ \left(-\frac{\ln^3(2)}{3!}x^3 + 3\frac{\ln^2(2)}{2 \cdot 3!}x^4 + o(x^4)\right) + \left(\frac{\ln^4(2)}{4!}x^4 + o(x^4)\right) + o(x^4) &= \\ 1 - \ln(2)x + \frac{1 + \ln^2(2)}{2}x^2 + \left(-\frac{3}{8} - \frac{\ln(2)}{3} - \frac{\ln^3(2)}{6}\right)x^3 + & \\ \left(\frac{1}{3} + \frac{3\ln(2)}{8} + \frac{\ln^2(2)}{12} + \frac{\ln^4(2)}{24}\right)x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

In definitiva, siccome f è derivabile infinite volte in 0, per l'unicità del polinomio di Taylor, il polinomio di Taylor cercato è

$$1 - \ln(2)x + \frac{1 + \ln^2(2)}{2}x^2 + \left(-\frac{3}{8} - \frac{\ln(2)}{3} - \frac{\ln^3(2)}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{3} + \frac{3\ln(2)}{8} + \frac{\ln^2(2)}{12} + \frac{\ln^4(2)}{24}\right)x^4.$$

Esercizio 3 Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile n volte sull'intervallo I . Sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor di grado n di f centrato in x_0 . Sia $a_i \in \mathbf{R}$ l' i -esimo coefficiente di $T_n(x)$, sia cioè

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Determinare il polinomio di Taylor di grado $n - 1$ della funzione f' (derivata prima di f) cioè scrivere i coefficienti di tale polinomio in funzione dei valori a_i .

Soluzione) Il coefficiente i -esimo del polinomio di Taylor centrato in x_0 di f è $a_i = \frac{f^i(x_0)}{i!}$ quindi

$$f^i(x_0) = i! \cdot a_i.$$

Il coefficiente i -esimo del polinomio di Taylor centrato in x_0 di f' è quindi

$$\frac{(f')^i(x_0)}{i!} = \frac{f^{i+1}(x_0)}{i!} = \frac{(i+1)!a_{i+1}}{i!} = (i+1)a_{i+1}.$$

Il polinomio di Taylor di grado $n - 1$ centrato in x_0 di $f'(x)$ è allora

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}(x - x_0)^k$$

cioè la derivata prima del polinomio $T_n(x)$.

Esercizio 4 Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile n volte sull'intervallo I . Sia $T_{n-1}(x)$ il polinomio di Taylor di grado $n - 1$ di f' centrato in x_0 . Sia $b_i \in \mathbf{R}$ l' i -esimo coefficiente di $T_{n-1}(x)$, sia cioè

$$T_{n-1}(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_{n-1}(x - x_0)^{n-1}.$$

Determinare il polinomio di Taylor di grado n della funzione f cioè scrivere i suoi coefficienti in funzione dei valori b_i e di $f(x_0)$.

Soluzione) Il coefficiente i -esimo del polinomio di Taylor centrato in x_0 di f' è $b_i = \frac{(f')^i(x_0)}{i!} = \frac{f^{i+1}(x_0)}{i!}$, quindi

$$f^{i+1}(x_0) = i!b_i.$$

Perciò $f^i(x_0) = (i-1)!b_{i-1}$, ponendo $b_{-1} := f(x_0)$ otteniamo che il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 di $f(x)$ è:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{(k-1)!b_{k-1}}{k!} (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{b_{k-1}}{k} (x-x_0)^k$$

cioè la primitiva di $T_n(x)$ il cui valore in x_0 è $f(x_0)$.

Esercizio 5 Scrivere il polinomio di Taylor di grado $2n$ centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ (suggerimento: usare il polinomio di Taylor della funzione $\frac{1}{1-x}$).

Soluzione) Siccome $f(x)$ è derivabile infinite volte in 0, esiste il polinomio di Taylor di grado $2n$ centrato in 0 di $f(x)$. Per l'unicità del polinomio di Taylor basterà trovare un polinomio $p_n(x)$ tale che

$$f(x) = p_n(x) + o(x^{2n}) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Siccome $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$, usando il polinomio di Taylor di grado n centrato in 0 di $\frac{1}{1-x}$, otteniamo

$$\frac{1}{x^2+1} = \sum_{k=0}^n ((-x)^2)^k + o(((x)^2)^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}).$$

Quindi il polinomio di Taylor cercato è $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$. (il polinomio di Taylor di grado n centrato in 0 della medesima funzione è allora $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k x^{2k}$)

Esercizio 6 Scrivere il polinomio di Taylor di grado $2n+1$ centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \arctan(x)$ (suggerimento: usare gli esercizi 4 e 5).

Soluzione) La derivata prima della funzione $\arctan(x)$ è la funzione $\frac{1}{x^2+1}$. Per l'esercizio precedente il polinomio di Taylor centrato in 0 di grado $2n$ di $\frac{1}{x^2+1}$ è $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$. Per l'esercizio 5 il polinomio di Taylor centrato in 0 di grado $2n+1$ di $\arctan(x)$ è allora $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ (il termine di grado 0 del polinomio è 0 perchè $\arctan(0) = 0$).

Esercizio Approssimare π senza stimare l'errore, usando il polinomio di Taylor di grado 5 centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \arctan(x)$ (suggerimento: usare $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$ oppure $\frac{\pi}{6} = \arctan(\frac{\sqrt{3}}{3})$ [usare $\sqrt{3} = 1.7320\dots$]). Confrontare i valori ottenuti nei due modi suggeriti. Quale si avvicina di più al valore π ? Perché?

Soluzione) 7 Per l'esercizio precedente il polinomio di Taylor di grado 5 centrato in 0 di $f(x) = \arctan(x)$ è

$$p(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5.$$

Calcolando questo polinomio in 1 otteniamo un valore approssimato $p(1) = 0.8\bar{6}$ per $\arctan 1 = \pi/4$ da cui ricaviamo il valore $4 \cdot p(1) = 3.4\bar{6}$ come approssimazione di π .

Calcolando lo stesso polinomio in $\frac{\sqrt{3}}{3}$, otteniamo il valore approssimato $p(\frac{\sqrt{3}}{3})$ di per $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \pi/6$. Usando 1.7320 come valore approssimato per $\sqrt{3}$, possiamo approssimare $\frac{\sqrt{3}}{3}$ con 0.5773, allora $p(\frac{\sqrt{3}}{3})$ e $\pi/6$ sono approssimati da $p(0.5773) = 0.5259$ e infine π è approssimato da $6 \cdot 0.5259 = 3.1554$.

La seconda approssimazione di π è migliore della prima. Questo può essere motivato osservando che nell'espressione del resto n-esimo di Lagrange compare il fattore $(x - x_0)^{n+1}$. Se $|x - x_0| > 1$, per n grande questo fattore diventa, in modulo, molto grande e quindi l'errore commesso nell'approssimazione per mezzo del polinomio di Taylor tende ad essere grande. Se $|x - x_0| = 1$ (come nel caso della nostra prima approssimazione di π) anche $|(x - x_0)^{n+1}| = 1$ e tale fattore non incide nell'errore commesso. Infine se $|x - x_0| < 1$ (come nel caso della nostra seconda approssimazione di π), allora il modulo di $(x - x_0)^{n+1}$ diventa molto piccolo e l'errore commesso nell'approssimazione per mezzo del polinomio di Taylor tende ad essere piccolo.

Esercizio 8 Approssimare $\sqrt{3}$ con errore inferiore a $\frac{1}{10000}$ usando il polinomio di Taylor, di grado opportuno, della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ centrato in $x_0 = 2.89 = (1.7)^2$ e stimando l'errore con la formula del resto di Lagrange.

Soluzione) In alcuni problemi sui polinomi di Taylor può essere più conveniente costruirsi direttamente con le derivate il polinomio di Taylor voluto piuttosto che cercare di ricondursi a polinomi di Taylor noti. Questo è, ad esempio, il caso dell'approssimazione numerica di $\sqrt{3}$. Siamo interessati alla funzione $f(x) = \sqrt{x}$, e le sue derivate superiori sono facilmente calcolabili. Se $n \geq 2$ si ha

$$f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n} x_0^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

Da cui la formula del resto n -esimo di Lagrange associata al polinomio di Taylor centrato in x_0 della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+2} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \xi^{-\frac{2n-1}{2}}}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

dove ξ appartiene all'intervallo aperto i cui estremi sono x_0 e x . Nel nostro caso $x_0 = 2.89$ e $x = 3$, in particolare $\xi > 2$, quindi $\xi^{-\frac{2n-1}{2}} < (1/2)^n$, inoltre $\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} < 1$ e $x - x_0 = 0.11$, quindi

$$|R_n(x)| < (1/2)^n (0.11)^{n+1}.$$

Già per $n = 3$ si ha $|R_3(x)| < 0.00001830125$. Quindi se calcoliamo il polinomio di Taylor T_3 di grado 3 di \sqrt{x} centrato in $x_0 = 2.89$ nel punto $x = 3$ otteniamo un valore che approssima $\sqrt{3}$ con errore inferiore a $\frac{1}{10000}$. Siccome il polinomio di Taylor di grado 3 di \sqrt{x} centrato in x_0 è

$$(x_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x_0)^{-\frac{1}{2}}(x - x_0) - \frac{1}{2} \frac{1}{4}(x_0)^{-\frac{3}{2}}(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{3}{8}(x_0)^{-\frac{5}{2}}(x - x_0)^3$$

otteniamo

$$T_3(3) = 1.7 + \frac{(0.11)}{(1.7) \cdot 2} - \frac{(0.0121)}{8 \cdot (4.913)} + \frac{(0.001331)}{16 \cdot (14.19857)} = 1.73205094457.$$

Siccome sappiamo che l'errore commesso nell'approssimazione è inferiore a 0.00001830125 possiamo concludere che le prime 5 cifre sono sicuramente uguali alle prime 5 cifre di $\sqrt{3}$ (confrontando con il valore di $\sqrt{3}$ ottenuto per mezzo di una calcolatrice si vede che lo stesso vale per le successive due cifre).

Esercizio 9 Sia $z = -\sqrt{33} - i\sqrt{11}$. Calcolare $\frac{z^{937}}{\bar{z}^{939}}$ e $\frac{z^{323} - \bar{z}^{323}}{|z|^{321}}$

Soluzione) Troviamo la forma esponenziale di z . Abbiamo $|z| = \sqrt{44}$, quindi

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{44} \left(-\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{44}} - i \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{44}} \right) = \sqrt{44} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \\ &= \sqrt{44} \left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \right) = \sqrt{44} e^{i\frac{4}{3}\pi}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\bar{z} = \sqrt{44} e^{-i\frac{4}{3}\pi}.$$

Otteniamo

$$\frac{z^{937}}{\bar{z}^{939}} = \frac{(\sqrt{44} e^{i\frac{4}{3}\pi})^{937}}{(\sqrt{44} e^{-i\frac{4}{3}\pi})^{939}} = \frac{1}{44} (e^{i\frac{4}{3}\pi})^{937+939} = \frac{1}{44} e^{i\frac{1876 \cdot 4}{3}\pi} = \frac{e^{i\frac{7504}{3}\pi}}{44}.$$

Siccome $7504 : 3 = 2501$ con resto di 1, otteniamo

$$e^{i\frac{7504}{3}\pi} = e^{i(2501\pi + \frac{1}{3}\pi)} = e^{i(2500\pi + \frac{4}{3}\pi)} = e^{i\frac{4}{3}\pi}.$$

Quindi

$$\frac{z^{937}}{\bar{z}^{939}} = \frac{e^{i\frac{7504}{3}\pi}}{44} = \frac{e^{i\frac{4}{3}\pi}}{44} = \frac{1}{44} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{88} - i \frac{1}{88}.$$

Sempre usando la forma esponenziale di z otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{z^{323} - \bar{z}^{323}}{|z|^{321}} &= \frac{(\sqrt{44} e^{i\frac{4}{3}\pi})^{323} - (\sqrt{44} e^{-i\frac{4}{3}\pi})^{323}}{(\sqrt{44})^{321}} = \\ &= \frac{(\sqrt{44})^{323}}{(\sqrt{44})^{321}} \cdot (e^{i\frac{323 \cdot 4}{3}\pi} - e^{-i\frac{323 \cdot 4}{3}\pi}) = 44 (e^{i\frac{1292}{3}\pi} - e^{-i\frac{1292}{3}\pi}) = 44(2i \operatorname{Im}(e^{i\frac{1292}{3}\pi})), \end{aligned}$$

dove $\operatorname{Im}(\alpha)$ denota la parte immaginaria del numero complesso α .

Siccome $1292 : 3 = 430$ con resto di 2 abbiamo $e^{i\frac{1292}{3}\pi} = e^{i(430 + \frac{2}{3})\pi} = e^{i\frac{2}{3}\pi}$, quindi

$$\frac{z^{323} - \bar{z}^{323}}{|z|^{321}} = 88i \cdot \operatorname{Im}(e^{i\frac{2}{3}\pi}) = 88i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 44\sqrt{3}i.$$

Esercizio 10 Trovare tutte le soluzioni complesse delle equazioni $z^2 = 48 + 14i$ e $z^2 = -5 + 12i$.

Soluzioni equazione $z^2 = 48 + 14i$ Siano $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ la parte reale e la parte immaginaria di z . Siccome il quadrato del numero complesso $z = x + iy$ è $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, z è soluzione dell'equazione $z^2 = 48 + 14i$ se e soltanto se

$$x^2 - y^2 = 48 \text{ e } 2xy = 14. \quad (1)$$

Se z è soluzione, sicuramente $y \neq 0$ perchè altrimenti z^2 sarebbe un numero reale e $48 + 14i$ non lo è. Possiamo dunque supporre $y \neq 0$ e ricavare $y = \frac{7}{x}$ dalla seconda delle equazioni (1). Sostituendo nella prima delle equazioni (1) otteniamo $x^2 - \frac{49}{x^2} = 48$ cioè $\frac{x^4 - 48x^2 - 49}{x^2} = 0$ e questa uguaglianza è verificata se e soltanto se $x^2 = \frac{48 \pm \sqrt{48^2 + 4 \cdot 49}}{2} = \frac{48 \pm 50}{2}$. Siccome x è un numero reale, x^2 è un numero reale positivo, quindi l'unico caso possibile è $x^2 = 49$, cioè $x = 7$ oppure $x = -7$. Se $x = 7$ allora $y = 1$ e otteniamo la prima soluzione $z = 7 + i$, se $x = -7$ allora $y = -1$ e otteniamo la seconda soluzione $z = -7 - i$.

Soluzioni equazione $z^2 = -5 + 12i$ Siano $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ la parte reale e la parte immaginaria di z . Siccome il quadrato del numero complesso $z = x + iy$ è $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, z è soluzione dell'equazione $z^2 = -5 + 12i$ se e soltanto se

$$x^2 - y^2 = -5 \text{ e } 2xy = 12. \quad (2)$$

Se z è soluzione, sicuramente $y \neq 0$ perchè altrimenti z^2 sarebbe un numero reale e $-5 + 12i$ non lo è. Possiamo dunque supporre $y \neq 0$ e ricavare $y = \frac{6}{x}$ dalla seconda delle equazioni (2). Sostituendo nella prima delle equazioni (2) otteniamo $x^2 - \frac{36}{x^2} = -5$ cioè $\frac{x^4 + 5x^2 - 36}{x^2} = 0$ e questa uguaglianza è verificata se e soltanto se $x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2}$. Siccome x è un numero reale, x^2 è un numero reale positivo, quindi l'unico caso possibile è $x^2 = 4$, cioè $x = 2$ oppure $x = -2$. Se $x = 2$ allora $y = 3$ e otteniamo la prima soluzione $z = 2 + 3i$, se $x = -2$ allora $y = -3$ e otteniamo la seconda soluzione $z = -2 - 3i$.

Esercizio 11 Trovare tutte le soluzioni complesse delle equazioni $z^2 + 3z - iz - 3i = 0$ e $z^2 + 2iz - 5z + 5 - 5i = 0$

Soluzioni equazione $z^2 + 3z - iz - 3i = 0$ Questo particolare esercizio si può risolvere velocemente osservando che $z^2 + 3z - iz - 3i = z(z+3) - i(z+3) = (z-i)(z+3)$, da cui le soluzioni di $z^2 + 3z - iz - 3i = 0$ sono $z = i$ e $z = -3$. Alternativamente si può procedere applicando il metodo generale di risoluzione dell'equazione di secondo grado. La formula risolutiva delle equazioni di secondo grado è $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dove $\sqrt{b^2 - 4ac}$ indica una qualsiasi delle 2 soluzioni complesse dell'equazione $z^2 = b^2 - 4ac$. Nel nostro caso $a = 1$, $b = 3 - i$ e $c = -3i$, quindi $b^2 - 4ac = 8 + 6i$. Per trovare le soluzioni dell'equazione $z^2 = 8 + 6i$ agiamo ora come nel precedente esercizio. Denotando con x la parte reale di una soluzione z di $z^2 = 8 + 6i$ e con y la sua parte immaginaria, si ha

$$x^2 - y^2 = 8 \text{ e } 2xy = 6$$

da cui segue che $y = \frac{3}{x}$ e $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ cioè

$$y = \frac{3}{x} \text{ e } x^2 = \frac{8 \pm 10}{2}.$$

Siccome x^2 è positivo, $x^2 = 9$ e quindi $x = \pm 3$. Se $x = 3$ allora $y = 1$, se $x = -3$ allora $y = -1$, e le soluzioni di $z^2 = 8 + 6i$ sono $3 + i$ e $-3 - i$. Le soluzioni dell'equazione proposta sono allora

$$z_{1,2} = \frac{i - 3 \pm (3 + i)}{2} =$$

cioè $z_1 = i$ e $z_2 = -3$

Soluzioni equazione $z^2 + 2iz - 5z + 5 - 5i = 0$) Volendo applicare la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado, in questo caso abbiamo $a = 1$, $b = -5 + 2i$ e $5 - 5i$. Quindi $b^2 - 4ac = 25 - 4 - 20 - 20 + 20i = 1$. Siccome le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 = 1$ sono 1 e -1 , le soluzioni dell'equazione proposta sono $\frac{-b \pm 1}{2a} = \frac{5 - 2i \pm 1}{2}$, cioè $2 - i$ e $3 - i$.

Esercizio 12 Trovare la somma di tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^8 = 1$$

$$z^8 = i$$

$$z^8 = \sqrt{47} + i\sqrt{e}$$

Soluzione) La somma delle radici n -esime di un qualsiasi numero complesso $\alpha = \rho e^{i\theta}$ è sempre 0. Nei casi in questione $n = 8$ è pari e se z è soluzione di $z^8 = \alpha$ anche l'opposto $-z$ è soluzione. Accoppiando a due a due le soluzioni opposte si vede che la somma di tutte le soluzioni è 0.

Vediamo che anche nel caso n dispari la somma delle soluzioni di $z^n = \rho e^{i\theta}$ è 0. Per quanto visto a lezione l'insieme delle soluzioni di $z^n = \rho e^{i\theta}$ è

$$\{\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi i}{n}} : 0 \leq k \leq n - 1\}.$$

La somma di tutti gli elementi di questo insieme è

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi i}{n}} = \rho^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k\frac{2\pi i}{n}} = \rho^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{2\pi i}{n}})^k.$$

L'ultimo termine è nullo perchè ponendo $z = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ nella formula $\frac{z^n - 1}{z - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{2\pi i}{n}})^k = \frac{e^{2\pi i} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} = 0.$$

Una dimostrazione alternativa del fatto che la somma delle radici n -esime di un numero complesso è nulla si può ottenere ricordando che tali radici sono i vertici di un n -agone regolare inscritto nel cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$. Pertanto ruotando il piano complesso di un angolo pari a $\frac{2\pi i}{n}$ intorno all'origine, le soluzioni dell'equazione $z^n = \rho e^{i\theta}$ vengono trasformate in soluzioni della stessa equazione. Siccome la rotazione di $\frac{2\pi i}{n}$ intorno all'origine è realizzata dalla moltiplicazione per $e^{\frac{2\pi i}{n}}$, denotate con z_1, z_2, \dots, z_n le radici n -esime di α , abbiamo la seguente identità di insiemi

$$\{z_1, z_2, \dots, z_n\} = \{e^{\frac{2\pi i}{n}} z_1, e^{\frac{2\pi i}{n}} z_2, \dots, e^{\frac{2\pi i}{n}} z_n\}.$$

Perciò

$$\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n e^{\frac{2\pi i}{n}} z_k = e^{\frac{2\pi i}{n}} \sum_{k=1}^n z_k$$

e siccome $e^{\frac{2\pi i}{n}} \neq 1$ deduciamo $\sum_{k=1}^n z_k = 0$. Per una soluzione ancora più generale del problema si veda la soluzione dell'esercizio successivo.

Esercizio 13 Trovare la somma di tutte le soluzioni complesse (eventualmente con molteplicità) dell'equazione

$$(e + 2i)z^5 + \sqrt{2}\pi z^4 + 2iz^3 - 31z^2 + 74 = 0.$$

Trovare la somma di tutte le soluzioni complesse (eventualmente con molteplicità) dell'equazione

$$(e + 2i\pi)z^5 + \sqrt{31}\pi z^4 + 2ez^3 - 36z^2 + 8i = 0$$

Esercizio 14 Trovare il prodotto di tutte le soluzioni complesse (eventualmente con molteplicità) dell'equazione

$$(e + 2i)z^5 + \sqrt{2}\pi z^4 + 2iz^3 - 31z^2 + 74 = 0$$

Trovare il prodotto di tutte le soluzioni complesse (eventualmente con molteplicità) dell'equazione

$$(e + 2i\pi)z^5 + \sqrt{31}\pi z^4 + 2ez^3 - 36z^2 + 8i = 0$$

Soluzioni esercizi 13 e 14 Per il teorema fondamentale dell'algebra, dato un polinomio a coefficienti complessi

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

esistono n numeri complessi z_1, z_2, \dots, z_n (non necessariamente distinti a due a due) tali che

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\dots(z - z_{n-1})(z - z_n). \quad (3)$$

Inoltre $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ è l'insieme delle soluzioni con molteplicità dell'equazione $p(z) = 0$. Svolgendo il prodotto a secondo termine nell'uguaglianza (3) otteniamo:

$$p(z) = a_n z^n + a_n(-z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} + z_n)z^{n-1} + \dots \quad (4)$$

$$a_n(-1)^n(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{n-1} \cdot z_n).$$

Quindi $a_{n-1} = a_n(-z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} + z_n)$ e di conseguenza

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}. \quad (5)$$

Inoltre $a_0 = a_n(-1)^n(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{n-1} \cdot z_n)$ e quindi

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{n-1} \cdot z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \quad (6)$$

Si noti che per $n = 2$ e $a_2 = 1$ queste formule riprovano che la somma delle soluzioni dell'equazione $z^2 + bz + c$ è $-b$ e il loro prodotto è c .

Usando la formula (5) otteniamo che la somma di tutte le soluzioni complesse (eventualmente con molteplicitá) dell'equazione

$$(e + 2i)z^5 + \sqrt{2}\pi z^4 + 2iz^3 - 31z^2 + 74 = 0$$

è

$$-\frac{\sqrt{2}\pi}{e + 2i} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{e + 2i} \frac{e - 2i}{e - 2i} = \frac{-e\sqrt{2}\pi}{e^2 - 4} + i \frac{2\sqrt{2}\pi}{e^2 - 4}.$$

Analogamente la somma di tutte le soluzioni complesse (eventualmente con molteplicitá) dell'equazione

$$(e + 2i\pi)z^5 + \sqrt{31}\pi z^4 + 2ez^3 - 36z^2 + 8i = 0$$

è

$$-\frac{\sqrt{31}\pi}{e + 2i\pi} = -\frac{\sqrt{31}\pi}{e + 2i\pi} \frac{e - 2i\pi}{e - 2i\pi} = -\frac{\sqrt{31}\pi \cdot e}{e - 4\pi^2} + i \frac{2\sqrt{31}\pi^2}{e - 4\pi^2}.$$

Usando la formula (6) otteniamo che il prodotto di tutte le soluzioni complesse (eventualmente con molteplicitá) dell'equazione

$$(e + 2i)z^5 + \sqrt{2}\pi z^4 + 2iz^3 - 31z^2 + 74 = 0$$

è

$$(-1)^5 \frac{74}{e + 2i} = \frac{-74}{e + 2i} \frac{e - 2i}{e - 2i} = -\frac{74e}{e^2 - 4} + i \frac{148}{e^2 - 4}$$

Analogamente il prodotto di tutte le soluzioni complesse (eventualmente con molteplicitá) dell'equazione

$$(e + 2i\pi)z^5 + \sqrt{31}\pi z^4 + 2ez^3 - 36z^2 + 8i = 0$$

è

$$(-1)^5 \frac{8i}{e + 2i\pi} = -\frac{8i}{e + 2i\pi} \frac{e - 2i\pi}{e - 2i\pi} = \frac{16}{e - 4\pi^2} - i \frac{8e}{e - 4\pi^2}.$$