

Richiami di teoria sugli o-piccolo

Definizione Sia $X \subset \mathbb{R}$, sia x_0 punto di accumulazione per X , siano $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni. Si dice che g è un o-piccolo di f per x che tende a x_0 e si scrive

$$g(x) = o(f(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

se esiste una funzione $h : X \setminus x_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

a $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ per ogni $x \in X \setminus x_0$

b $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$.

Proprietà

1. $o(f) + o(f) = o(f)$,
cioè se $k_1(x) = o(f(x))$ e $k_2(x) = o(f(x))$ per $x \rightarrow x_0$ allora $k_1(x) + k_2(x) = o(f(x))$ per $x \rightarrow x_0$.
2. $g \cdot o(f) = o(g \cdot f)$,
cioè se $k(x) = o(f(x))$ per $x \rightarrow x_0$ allora $g(x) \cdot k(x) = o(g(x) \cdot f(x))$ per $x \rightarrow x_0$.
3. $o(o(f)) = o(f)$,
cioè se $k_1(x) = o(f(x))$ e $k_2(x) = o(h(x))$ per $x \rightarrow x_0$ allora $k_2(x) = o(f(x))$ per $x \rightarrow x_0$.
4. $o(f + o(f)) = o(f)$,
cioè se $k_1(x) = o(f(x))$ e $k_2(x) = o(f(x) + k_1(x))$ per $x \rightarrow x_0$ allora $k_2(x) = o(f(x))$ per $x \rightarrow x_0$.
5. Se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \neq x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ allora $f(x) = g(x) + o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$.
6. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ (ad esempio se $g(x)$ è la funzione costante uguale ad a) con $0 \neq a \in \mathbb{R}$ allora $o(g(x) \cdot f(x)) = o(f(x))$ per $x \rightarrow x_0$.
7. Sia $\phi : Y \rightarrow X$ e sia y_0 un punto di accumulazione per $Y \subset \mathbb{R}$, sia inoltre $\lim_{y \rightarrow y_0} \phi(y) = x_0$. Sia $f(x_0) = 0$ oppure x_0 non appartenga a $\phi(Y)$. Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ allora $f(\phi(y)) = o(g(\phi(y)))$ per $y \rightarrow y_0$.

Nota sulla proprietà 7:

Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ esiste $h : X \setminus x_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ per ogni $x \in X \setminus x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$.

Se $f(x_0) = 0$ costruisco $\tilde{h} : X \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $\tilde{h}(x_0) = 0$ e $\tilde{h}(x) = h(x)$ se $x \neq x_0$. Per costruzione $\tilde{h}(\phi(y)) = h(y)$ per ogni $y \in Y$, inoltre siccome $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{h}(x) = \tilde{h}(x_0) = 0$ possiamo applicare il teorema sul limite della composizione di due funzioni e ottenere $\lim_{y \rightarrow y_0} \tilde{h}(\phi(y)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{h}(x) = 0$. Quindi $f(\phi(y)) = o(g(\phi(y)))$.

Se x_0 non appartiene a $\phi(Y)$ basta considerare la funzione $h(\phi(y))$. Analogamente a prima $f(\phi(y)) \cdot h(\phi(y)) = g(\phi(y))$ e siccome x_0 non appartiene a $\phi(Y)$ possiamo applicare il teorema sul limite della composizione e ottenere $\lim_{y \rightarrow y_0} h(\phi(y)) = 0$. Quindi, anche in questo caso, $f(\phi(y)) = o(g(\phi(y)))$.

Osservazione *:

Se $T_n(t)$ è il polinomio di Taylor di grado n centrato in t_0 della funzione $f(t)$ allora $f(t) - T_n(t) = o((t - t_0)^n)$ per $t \rightarrow t_0$. Inoltre $f(t_0) - T_n(t_0) = 0$.

Quindi, per la precedente nota, data una qualsiasi funzione $\phi(x)$ la cui immagine sia contenuta nel dominio di f e tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = t_0$, abbiamo che $f(\phi(x)) - T_n(\phi(x)) = o((\phi(x) - t_0)^n)$ per $x \rightarrow x_0$, cioè

$$f(\phi(x)) = T_n(\phi(x)) + o((\phi(x) - t_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0.$$

Approssimazioni con formula di Taylor e resto di Peano di alcune funzioni elementari:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + o(x^{2n+2}) =$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1!} + o(x^{2n+2}) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1}) =$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n+1}) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) =$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2!2^2}x^2 + \frac{3}{3!2^3}x^3 + (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2n-3}{n!2^n}x^n + o(x^n) =$$

$$1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2k-3}{k!2^k}x^k + o(x^n) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Formula di Taylor con resto di Peano e calcolo dei limiti: Il tipico caso di applicazione della formula di Taylor con resto di Peano è quello in cui si vuole calcolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. In questo caso, se m è il minimo naturale tale che il polinomio di Taylor di grado m centrato in x_0 di $f(x)$ non è nullo si ha

$$f(x) = \alpha(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

dove α è un numero reale non nullo.

Analogamente, se n è il minimo naturale tale che il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 di $g(x)$ non è nullo si ha

$$g(x) = \beta(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

dove β è un numero reale non nullo.

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)}{\beta(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)} = \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0)^m}{(x-x_0)^n} \cdot \frac{\alpha + o(1)}{\beta + o(1)} &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0)^m}{(x-x_0)^n}\end{aligned}$$

(Nella seconda uguaglianza abbiamo usato la proprietà 2 degli o-piccolo e nella terza la proposizione sul calcolo dei limiti). L'ultimo limite è infine facilmente calcolabile.

Esercizio 1 Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x) + x^2 - x}{\sin^3(x)}.$$

Suggerimento: calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 centrato in 0 di $e^{\sin(x)}$ usando i polinomi di Taylor di e^x e $\sin(x)$.

Soluzione) Calcoliamo innanzitutto il polinomio di Taylor di grado 3 centrato in 0 della funzione $e^{\sin(x)}$.

Siccome il polinomio di Taylor grado 3 centrato in 0 di e^x è $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0. \quad (1)$$

Siccome $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ abbiamo anche

$$e^{\sin(x)} = 1 + \sin(x) + \frac{(\sin(x))^2}{2!} + \frac{(\sin(x))^3}{3!} + o((\sin(x))^3) \text{ per } x \rightarrow 0. \quad (2)$$

Inoltre il polinomio di Taylor grado 3 centrato in 0 di $\sin(x)$ è $x - \frac{x^3}{3!}$, quindi

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0 \quad (3)$$

e sostituendo nella precedente equazione (2) otteniamo:

$$\begin{aligned}e^{\sin(x)} &= 1 + x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) + \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^2}{2!} + \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^3}{3!} + \\ &\quad o((x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^3) \text{ per } x \rightarrow 0.\end{aligned} \quad (4)$$

Svolgiamo ora i calcoli sul termine a destra dell'ultima equazione (4). Abbiamo

$$\begin{aligned}(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^2 &= x^2 + \frac{x^6}{3!3!} + o(x^3)o(x^3) - \frac{2x^4}{3!} + 2xo(x^3) - 2\frac{x^3}{3!}o(x^3) = \\ x^2 + \frac{x^6}{3!3!} + o(x^6) - \frac{2x^4}{3!} &+ 2o(x^4) - 2\frac{1}{3!}o(x^6) = x^2 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0\end{aligned} \quad (5)$$

(Nella prima uguaglianza della (5) abbiamo solo svolto il quadrato, nella seconda abbiamo usato che $f \circ g = o(fg)$ e che $o(f) \circ g = o(f \circ g) = o(o(fg)) = o(fg)$,

Nella terza abbiamo usato $x^\alpha = o(x^\beta)$ se $\alpha > \beta$ e $o(f) + o(f) = o(f)$.

Inoltre abbiamo

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3 &= \left(x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2)\right)\right)^3 = \\ x^3\left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2)\right)^3 &= x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6)$$

(Nell'ultima uguaglianza (6) abbiamo usato che, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

allora

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

[nel nostro caso $x_0 = 0$, $f(x) = x^3(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2))^3$ e $g(x) = x^3$], alternativamente avremmo potuto svolgere il cubo $(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2))^3$.

Infine dalla (6), ricordando che $o(f + o(f)) = o(f)$, otteniamo anche

$$o\left(\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3\right) = o(x^3 + o(x^3)) = o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0 \quad (7)$$

Sostituendo le espressioni trovate in (5), (6) e (7) nell'equazione (4) otteniamo:

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} &= 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{3!} + o(x^3) = \\ 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{o(x^3)}{2} + \frac{o(x^3)}{3!} + o(x^3) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) = \quad (8) \\ 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) &\text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(Nella terza uguaglianza di (8) abbiamo usato che se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ esiste ed è un numero reale non nullo, allora $g \circ f = o(f)$ per $x \rightarrow x_0$, nel nostro caso il ruolo di g è giocato dalle funzioni costanti $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3!}$).

Per l'unicità del polinomio di Taylor, se f è derivabile n volte in x_0 , esiste un unico polinomio $p(x)$ di grado minore o uguale a n tale che $f(x) = p(x) + o((x - x_0)^n)$ per $x \rightarrow x_0$ e tale polinomio è il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 della funzione $f(x)$.

Nel nostro caso $f(x) = e^{\sin(x)}$ è derivabile infinite volte su tutto \mathbb{R} , quindi per l'equazione (8) il polinomio di Taylor di grado 3 centrato in 0 di $f(x) = e^{\sin(x)}$ è $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Possiamo adesso occuparci del calcolo del limite.

Siccome il polinomio di Taylor di grado 3 di $\cos(x)$ centrato in 0 è $1 - \frac{x^2}{2}$ abbiamo

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0. \quad (9)$$

Infine, siccome $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, abbiamo anche $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)^3}{x^3} = 1$. Dunque, analogamente a prima (vedi commenti all'equazione (6)),

$$\sin(x)^3 = x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0 \quad (10)$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x) + x^2 - x}{\sin^3(x)} &= \quad (11) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) - 1 + \frac{x^2}{2} - o(x^3) + x^2 - x}{x^3 + o(x^3)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^3} \frac{2 + o(x)}{1 + o(1)} \end{aligned}$$

(Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato $o(fg) = fo(g)$ e nella precedente $o(f) + o(f) = o(f)$). Siccome

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + o(x)}{1 + o(1)} = 2$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^3} = +\infty,$$

per la proposizione sul calcolo dei limiti si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x) + x^2 - x}{\sin^3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + o(x)}{1 + o(1)} = +\infty \cdot 2 = +\infty.$$

Analogamente

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x) + x^2 - x}{\sin^3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x^3} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + o(x)}{1 + o(1)} = -\infty \cdot 2 = -\infty.$$

Siccome i limiti destro e sinistro esistono ma sono diversi, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x) + x^2 - x}{\sin^3(x)}$$

non esiste.

Esercizio 2 Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin(x^3) - \sin^3(x)}{x \ln(\cos(x^2))}$$

Soluzione) Basta cercare i polinomi di Taylor non nulli di grado minimo centrati in 0 di numeratore e denominatore. Per quanto riguarda il numeratore, siccome

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0$$

(usando l'osservazione *) abbiamo

$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{3!} + o(x^{12}) \text{ per } x \rightarrow 0. \quad (12)$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^3 = x^3\left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3)\right)^3 = \\ &= x^3\left(\left(1 - 3\frac{x^2}{3!} - o(x^3)\right) + o\left(\frac{x^2}{3!} - o(x^3)\right)\right) = x^3\left(\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) = \\ &= x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0\end{aligned}\quad (13)$$

(nella seconda uguaglianza abbiamo usato la proprietà 2 degli o-piccolo, nella terza abbiamo usato il limite notevole $(1 + f(x))^\alpha - 1 = \alpha f(x) + o(f(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, nella quarta le proprietà 1,4 e 6 degli o-piccolo, nella quinta ancora la proprietà 2 degli o-piccolo).

In conclusione, sostituendo i termini ottenuti in (12) e (13) nell'espressione del numeratore otteniamo

$$\sin(x^3) - \sin^3(x) = x^3 - \frac{x^9}{3!} + o(x^{12}) - x^3 + \frac{x^5}{2} - o(x^5) = \frac{x^5}{2} + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0. \quad (14)$$

(nell'ultima uguaglianza abbiamo usato le proprietà 1 e 3 degli o-piccolo oltre alle identità $x^9 = o(x^5)$ e $x^{12} = o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$).

Consideriamo ora il denominatore: usando ripetutamente l'osservazione * otteniamo

$$\begin{aligned}x \ln(\cos(x^2)) &= x \cdot \ln\left(1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = \\ &= x \cdot \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) + o\left(-\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = -\frac{x^5}{2} + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0.\end{aligned}\quad (15)$$

(la prima uguaglianza è stata ottenuta applicando l'osservazione * con $f(t) = \cos(t)$, $t_0 = 0$ e $\phi(x) = x^2$, per la seconda è stata applicata la stessa osservazione con $f(t) = \ln(1 + t)$, $t_0 = 0$ e $\phi(x) = -\frac{x^4}{2} + o(x^4)$, nella terza uguaglianza sono state usate le proprietà 1,2,4 e 6 degli o-piccolo).

Usando le equazioni (14) e (15) il limite proposto diventa:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin(x^3) - \sin^3(x)}{x \ln(\cos(x^2))} &= \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\frac{x^5}{2} + o(x^5)}{-\frac{x^5}{2} + o(x^5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^5 \frac{1}{2} + o(1)}{x^5 - \frac{1}{2} + o(1)} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = -1.\end{aligned}\quad (16)$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo usato la proprietà 2 degli o-piccoli e nelle ultime due la proposizione sul calcolo dei limiti.

Esercizio 3 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 6 centrato in 0 di

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)$$

e dedurre le prime sei derivate in 0 di $f(x)$.

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \cos(x) + e^{\sin(\frac{x}{24})}}{\arctan(\sin(x^6))}$$

Soluzione) La funzione $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ è nota come coseno iperbolico e si denota con $\cosh(x)$. Abbiamo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0$$

e quindi, per l'osservazione *,

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Sommando membro a membro e dividendo per 2 otteniamo

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0. \quad (17)$$

Siccome

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6) = 0,$$

usando il polinomio di Taylor di grado 3 centrato in 0 di $\ln(1+x)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \ln(\cosh(x)) &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right) - \frac{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right)^2}{2} + \\ &\frac{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right)^3}{3} + o\left(\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right)^4\right) \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Svolgendo i calcoli e usando le proprietà degli o-piccoli abbiamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right)^2 &= \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^4}{4!} + o(x^6) = \\ &\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{4!} + o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0, \\ \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right)^3 &= \frac{x^6}{8} + o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0, \\ o\left(\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right)^4\right) &= o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \ln(\cosh(x)) &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right) - \frac{\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{4!} + o(x^6)}{2} + \\ &\frac{\frac{x^6}{8} + o(x^6)}{3} + o(x^6) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Siccome la funzione $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)$ è composizione di funzioni derivabili infinite volte nel loro dominio essa è derivabile infinite volte in 0 e quindi ammette polinomio di Taylor di grado qualsiasi centrato in 0. Dunque il polinomio di Taylor di grado 6 centrato in 0 di $f(x)$ esiste. Per l'unicità del polinomio di Taylor esso è l'unico polinomio $T_6(x)$ di grado minore o uguale a 6 tale che $f(x) = T_6(x) + o(x^6)$ per $x \rightarrow x_0$. Dall'equazione (19) deduciamo allora

$$T_6(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45}.$$

Siccome il k -esimo coefficiente del polinomio di Taylor di $f(x)$ centrato in x_0 è $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ otteniamo anche:

$$f'(0) = 0, f^{(2)}(0) = 1, f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 2, f^{(5)}(0) = 0, f^{(6)}(0) = 16.$$

Rimane da calcolare il limite. Come al solito, basta trovare i polinomi di Taylor non nulli di grado minimo di numeratore e denominatore. Usando i limiti notevoli otteniamo

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0 \\ e^{\sin(\frac{x}{24})} &= 1 + \sin(\frac{x}{24}) + o(\sin(\frac{x}{24})) = 1 + \frac{x}{24} + o(\frac{x}{24}) + o(\frac{x}{24} + o(\frac{x}{24})) = \\ &= 1 + \frac{x}{24} + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Siccome i coefficienti dei termini di grado 1 dei polinomi di Taylor centrati in 0 di $f(x)$ e $\cos(x)$ sono nulli mentre quello del polinomio di Taylor di $e^{\sin(\frac{x}{24})}$ è non nullo, il polinomio di Taylor di grado 1 centrato in 0 del numeratore è non nullo. Ai fini del calcolo del limite, basta quindi determinare il polinomio di Taylor di grado 1 centrato in 0 del numeratore. Abbiamo

$$f(x) - \cos(x) + e^{\sin(\frac{x}{24})} = \tag{20}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + o(x^6) - 1 + \frac{x^2}{2} - o(x^2) + 1 + \frac{x}{24} + o(x) = \frac{x}{24} + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Per quanto riguarda il denominatore, usando i limiti notevoli,

$$\begin{aligned} \arctan(\sin(x^6)) &= \sin(x^6) + o(\sin(x^6)) = \\ &= x^6 + o(x^6) + o(x^6 + o(x^6)) = x^6 + o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{21}$$

In conclusione,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \cos(x) + e^{\sin(\frac{x}{24})}}{\arctan(\sin(x^6))} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{24} + o(x)}{x^6 + o(x^6)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^6} \cdot \frac{\frac{1}{24} + o(1)}{1 + o(1)} = +\infty \cdot \frac{1}{24} = +\infty. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - \cos(x) + e^{\sin(\frac{x}{24})}}{\arctan(\sin(x^6))} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{24} + o(x)}{x^6 + o(x^6)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^6} \cdot \frac{\frac{1}{24} + o(1)}{1 + o(1)} = -\infty \cdot \frac{1}{24} = -\infty. \end{aligned}$$

Siccome i limiti destro e sinistro sono diversi il limite proposto non esiste.

Esercizio 4 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 5 centrato in 0 di

$$f(x) = \ln(\cos(x)\sqrt{1+x^4})$$

e dedurre le prime 5 derivate di $f(x)$ in 0.

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \cos(x) + 1 - \frac{11}{24}x^4}{\sin^2(x)(\cos(x) - 1)}$$

Soluzione) Usando il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in 0 di $\sqrt{1+x}$, otteniamo

$$\sqrt{1+x^4} = 1 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{8} + o(x^8) = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Quindi

$$\ln(\cos(x)\sqrt{1+x^4}) = \ln\left(\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)\right)\right) = \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{4!} + o(x^5)\right) = \\ & \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{4!} + o(x^5)\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2}{2} + \\ & \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{4!} + o(x^5)\right)^3}{3} + o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{4!} + o(x^5)\right)^4\right) = \\ & -\frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) = -\frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{12} + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Siccome $f(x)$ è derivabile infinite volte in 0, per l'unicità del polinomio di Taylor, dall'equazione (22) deduciamo che il polinomio di Taylor di grado 5 centrato in 0 della funzione $f(x)$ è

$$T_5(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{12}.$$

Ne segue:

$$f'(0) = 0, f^{(2)}(0) = -1, f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 10, f^{(5)}(0) = 0.$$

Per il calcolo del limite osserviamo che il polinomio di Taylor di grado 4 centrato in 0 del numeratore è non nullo. Infatti

$$\begin{aligned} f(x) - \cos(x) + 1 - \frac{11}{24}x^4 &= -\frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{12} + o(x^5) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - \frac{11}{24}x^4 = \\ &= -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Anche il polinomio di Taylor di grado 4 centrato in 0 del denominatore non è nullo. più precisamente

$$\sin^2(x)(\cos(x) - 1) = (x + o(x))^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0. \quad (24)$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \cos(x) + 1 - \frac{11}{24}x^4}{\sin^2(x)(\cos(x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 5 Calcolare il limite per $x \rightarrow +\infty$ di

1. $5^x(\sin(\pi^{-x}) - \pi^{-x})$
2. $\frac{e^{\frac{1}{x+1}} - \sin\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x^2+2x+\frac{3}{2}}{(x+1)^2}}{\tan\left(\frac{1}{x+3}\right) - \sin\left(\frac{1}{x+1}\right)}$
3. $x^2 \cos(3x^{-1}) - x(x-1)e^{x^{-1}}$

Soluzione 1 Siccome $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi^{-x} = 0$, usando il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in 0 della funzione seno, otteniamo

$$\sin(\pi^{-x}) = \pi^{-x} + o((\pi^{-x})^2) \text{ per } x \rightarrow \infty.$$

Sostituendo questa espressione nel limite proposto otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x(\sin(\pi^{-x}) - \pi^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x \cdot o((\pi^{-x})^2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} o\left(\frac{5^x}{(\pi^x)^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} o\left(\left(\frac{5}{\pi^2}\right)^x\right) = 0.$$

L'ultima uguaglianza è vera perchè $5 < \pi^2$, quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{\pi^2}\right)^x = 0$ e di conseguenza $\lim_{x \rightarrow +\infty} o\left(\left(\frac{5}{\pi^2}\right)^x\right) = 0$.

Osservazione: si noti che non sarebbe stato sufficiente usare il polinomio di Taylor di grado 1 centrato in 0 della funzione seno. Infatti con lo sviluppo al primo ordine avremmo ottenuto

$$\sin(\pi^{-x}) = \pi^{-x} + o(\pi^{-x}) \text{ per } x \rightarrow \infty$$

e quindi

$$5^x(\sin(\pi^{-x}) - \pi^{-x}) = 5^x \cdot o(\pi^{-x}) = o\left(\frac{5^x}{(\pi^x)^2}\right) = o\left(\left(\frac{5}{\pi}\right)^x\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty. \quad (25)$$

Siccome $5 > \pi$, si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{\pi}\right)^x = +\infty$. Quindi l'equazione (25) non ci dà informazioni sul valore del limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x(\sin(\pi^{-x}) - \pi^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} o\left(\left(\frac{5}{\pi}\right)^x\right)$$

(ad esempio ogni funzione costante è un o piccolo di $\left(\frac{5}{\pi}\right)^x$).

Soluzione 2) La strategia è quella di usare i polinomi di Taylor di e^x , $\sin x$ e $\tan(x)$ e ridurre la funzione di cui vogliamo calcolare il limite nella forma

$$\frac{e^{\frac{1}{x+1}} - \sin\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x^2+2x+\frac{3}{2}}{(x+1)^2}}{tg\left(\frac{1}{x+3}\right) - \sin\left(\frac{1}{x+1}\right)} = \frac{f(x) + o(f(x))}{g(x) + o(g(x))} \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

dove f e g sono due rapporti di polinomi non identicamente nulli.

Siccome $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, usando i polinomi di Taylor di grado 3 centrati in 0 di e^x e $\sin(x)$, otteniamo:

$$e^{\frac{1}{x+1}} = 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3!(x+1)^3} + o\left(\frac{1}{(x+1)^3}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

$$\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3!(x+1)^3} + o\left(\frac{1}{(x+1)^3}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

Sostituendo nell'espressione del numeratore otteniamo

$$e^{\frac{1}{x+1}} - \sin\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x^2+2x+\frac{3}{2}}{(x+1)^2} = \tag{26}$$

$$1 + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + o\left(\frac{1}{(x+1)^3}\right) - \frac{x^2+2x+\frac{3}{2}}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{1}{3(x+1)^3} + o\left(\frac{1}{(x+1)^3}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Passiamo ad analizzare il denominatore. Siccome $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+3} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, usando i polinomi di Taylor di grado 2 centrati in 0 delle funzioni tangente e seno rispettivamente, otteniamo

$$\tan\left(\frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{x+3} + o\left(\frac{1}{(x+3)^2}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty,$$

e

$$\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Quindi

$$\tan\left(\frac{1}{x+3}\right) - \sin\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x+3} + o\left(\frac{1}{(x+3)^2}\right) - \frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) =$$

$$\frac{-2}{(x+1)(x+3)} + o\left(\frac{1}{(x+3)^2}\right) + o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \tag{27}$$

$$\frac{-2}{(x+1)(x+3)} + o\left(\frac{1}{(x+1)(x+3)}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

(nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la proprietà 6 degli o-piccoli, cioè siccome

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{(x+1)(x+3)}} = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(x+3)^2}}{\frac{1}{(x+1)(x+3)}}$$

si ha $o(\frac{1}{(x+1)^2}) = o(\frac{1}{(x+1)(x+3)}) = o(\frac{1}{(x+3)^2})$ per $x \rightarrow +\infty$. Usando le uguaglianze (26) e (27) nel calcolo del limite proposto, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} - \sin(\frac{1}{x+1}) - \frac{x^2+2x+\frac{3}{2}}{(x+1)^2}}{\tan(\frac{1}{x+3}) - \sin(\frac{1}{x+1})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3(x+1)^3} + o(\frac{1}{(x+1)^3})}{\frac{-2}{(x+1)(x+3)} + o(\frac{1}{(x+1)(x+3)})} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^3}}{\frac{1}{(x+1)(x+3)}} \cdot \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{-2 + o(1)} &= 0 \cdot \frac{-1}{6} = 0 \end{aligned}$$

Osservazione: in questo caso per determinare il limite sarebbe stato sufficiente usare nell'analisi del numeratore i polinomi di Taylor di grado due delle funzioni seno e esponenziale. Con la stessa analisi del denominatore avremmo trovato

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} - \sin(\frac{1}{x+1}) - \frac{x^2+2x+\frac{3}{2}}{(x+1)^2}}{\tan(\frac{1}{x+3}) - \sin(\frac{1}{x+1})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{o(\frac{1}{(x+1)^2})}{\frac{-2}{(x+1)(x+3)} + o(\frac{1}{(x+1)(x+3)})} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{o(\frac{1}{(x+1)(x+3)})}{\frac{-2}{(x+1)(x+3)} + o(\frac{1}{(x+1)(x+3)})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)(x+3)}}{\frac{1}{(x+1)(x+3)}} \cdot \frac{o(1)}{-2 + o(1)} = \\ 1 \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

Al contrario non sarebbe stato sufficiente usare i polinomi di Taylor di grado 1 di seno e tangente nell'analisi del denominatore. Infatti avremmo ottenuto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} - \sin(\frac{1}{x+1}) - \frac{x^2+2x+\frac{3}{2}}{(x+1)^2}}{\tan(\frac{1}{x+3}) - \sin(\frac{1}{x+1})} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3(x+1)^3} + o(\frac{1}{(x+1)^3})}{\frac{1}{(x+3)} - \frac{1}{(x+1)} + o(\frac{1}{(x+3)}) - o(\frac{1}{(x+1)})} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3(x+1)^3} + o(\frac{1}{(x+1)^3})}{\frac{-2}{(x+3)(x+1)} + o(\frac{1}{(x+3)}) - o(\frac{1}{(x+1)})} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3(x+1)^3} + o(\frac{1}{(x+1)^3})}{o(\frac{1}{(x+1)})} & \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza è vera perchè $\frac{-2}{(x+3)(x+1)} = o(\frac{1}{(x+1)})$ e $o(\frac{1}{(x+3)}) = o(\frac{1}{(x+1)})$ per $x \rightarrow +\infty$. Si noti anche che nell'ultimo passaggio non si sono perse informazioni sulla funzione a denominatore. Infatti non solo ogni funzione della forma $\frac{-2}{(x+3)(x+1)} + o(\frac{1}{(x+3)}) - o(\frac{1}{(x+1)})$ per $x \rightarrow +\infty$ è un $o(\frac{1}{(x+1)})$ per $x \rightarrow +\infty$, ma anche ogni funzione che è un $o(\frac{1}{(x+1)})$ per $x \rightarrow +\infty$ può essere scritta nella forma $\frac{-2}{(x+3)(x+1)} + o(\frac{1}{(x+3)}) - o(\frac{1}{(x+1)})$ per $x \rightarrow +\infty$ (in generale se $g = o(f)$ per $x \rightarrow x_0$ e $h = o(f)$ per $x \rightarrow x_0$, allora posso scrivere h come la somma di g e di un $o(f)$ per $x \rightarrow x_0$, più precisamente $h = g + (h - g)$).

Infine l'espressione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3(x+1)^3} + o(\frac{1}{(x+1)^3})}{o(\frac{1}{(x+1)})}$$

non consente di determinare il limite iniziale (se l' $o(\frac{1}{(x+1)})$ fosse la funzione $\frac{1}{a(x+1)^3}$ con $0 \neq a \in \mathbb{R}$ il limite sarebbe $\frac{a}{3}$).

Soluzione 3) Ponendo $y = \frac{1}{x}$ (cioè $y = \frac{1}{x}$), siccome $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, il limite diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(3y)}{y^2} + \frac{y-1}{y^2} e^y.$$

Equivalentemente la funzione $h(x) = x^2 \cos(3x^{-1}) - x(x-1)e^{x^{-1}}$ è composizione delle funzioni $f(y) = \frac{\cos(3y)}{y^2} + \frac{y-1}{y^2} e^y$ e $y = g(x) = \frac{1}{x}$.

Siccome $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, applicando il teorema sul limite della composizione di due funzioni, otteniamo che, se $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(3y)}{y^2} + \frac{y-1}{y^2} e^y$ esiste, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cos(3x^{-1}) - x(x-1)e^{x^{-1}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(3y)}{y^2} + \frac{y-1}{y^2} e^y.$$

Usando i polinomi di Taylor di grado 2 centrati in 0 delle funzioni a numeratore otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(3y)}{y^2} + \frac{y-1}{y^2} e^y &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - 9\frac{y^2}{2} + o(y^2) + (y-1)(1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2))}{y^2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - 9\frac{y^2}{2} + o(y^2) + y + y^2 + \frac{y^3}{2} + o(y^3) - 1 - y - \frac{y^2}{2} - o(y^2)}{y^2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-4y^2 + o(y^2)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y^2} (-4 + o(1)) = -4 \end{aligned}$$

Esercizio 6 Sia:

$$f(x) = \begin{cases} x^3(\sin(1/x)) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

È vero che il polinomio di Taylor di grado due di $f(x)$ centrato in 0 è il polinomio nullo?

Soluzione) Il polinomio $p(x) = 0$ è il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in 0 di $f(x)$ se e soltanto se $f(x)$ è derivabile 2 volte in 0 e $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Per l'unicità del polinomio di Taylor, $p(x)$ è il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in 0 di $f(x)$ se e soltanto se $f(x)$ è derivabile 2 volte in 0 e $f(x) = p(x) + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$. Nel nostro caso

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(\sin(1/x))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x(\sin(1/x)) = 0$$

(l'ultima uguaglianza è vera perchè per $x \neq 0$ si ha

$$-|x| \leq x(\sin(1/x)) \leq |x|$$

e, siccome $\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, allora per il teorema dei carabinieri $\lim_{x \rightarrow 0} x(\sin(1/x)) = 0$).

Tuttavia non è vero che il polinomio nullo è il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in 0 di $f(x)$ perchè $f(x)$ non è derivabile 2 volte in 0. La funzione $f(x)$ è derivabile in 0, infatti calcolando il limite del rapporto incrementale otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(\sin(1/x)) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2(\sin(1/x)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(\sin(1/x)) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \cdot 0 = 0.$$

Dunque $f'(0) = 0$. Fuori da 0 la funzione f è derivabile infinite volte e per calcolare la derivata prima di f in un qualsiasi $x \neq 0$, possiamo usare le regole di derivazione. Otteniamo

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2(\sin(1/x)) - x(\cos(1/x)) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Mostriamo ora che f non è derivabile due volte in 0 facendo vedere che il limite del rapporto incrementale in 0 della funzione f' non esiste. Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2(\sin(1/x)) - x(\cos(1/x)) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 3x(\sin(1/x)) - \cos(1/x).$$

Posto $g(x) = 3x(\sin(1/x)) - \cos(1/x)$, per mostrare che $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ non esiste basta trovare due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} g(b_n)$. Possiamo prendere $\{a_n\} = \{\frac{1}{2\pi n}\}$ e $\{b_n\} = \{\frac{1}{\pi + 2\pi n}\}$. Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \frac{1}{2\pi n} (\sin(2\pi n)) - \cos(2\pi n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \frac{1}{\pi + 2\pi n} (\sin(\pi + 2\pi n) - \cos(\pi + 2\pi n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Quindi il limite del rapporto incrementale in 0 di f' non esiste e f non è derivabile due volte in 0.

Esercizio 7 Calcolare \sqrt{e} con errore inferiore a $1/1000$.

Soluzione) Approssimiamo la funzione e^x con il suo polinomio di Taylor di grado n centrato in 0 e stimiamo l'errore commesso usando la formula del resto di Lagrange. Abbiamo

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

L'espressione di Lagrange per il resto nel nostro caso è:

$$R_n(x) = e^\xi \frac{x^{n+1}}{n+1!}$$

dove ξ appartiene all'intervallo aperto avente 0 e x come estremi. Se vogliamo approssimare $\sqrt{e} = e^{1/2}$ con errore inferiore a $1/1000$ basterà porre $x = 1/2$ nelle precedenti formule e scegliere n in modo che $|R_n(x)| < 1/1000$. Se $x = 1/2$ si ha $\xi < 1/2$ e $e^\xi < e^{1/2} < 3^{1/2} < 2$. Quindi

$$|R_n(1/2)| < \frac{2}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^n}.$$

Già per $n = 4$ otteniamo $|R_n(1/2)| < 1/1920$. Quindi $\sum_{k=0}^4 \frac{(1/2)^k}{k!}$ approssima \sqrt{e} con errore inferiore a $1/1000$. Esplicitando il calcolo otteniamo il valore approssimato

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{16} = 1,6484375.$$

Osserviamo che siccome l'errore commesso è inferiore a $1/1000$ le prime due cifre dopo la virgola sono sicuramente corrette e la terza può variare al più per un unità (controllando con la calcolatrice si trova che anche la terza cifra dopo la virgola è corretta).