Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale e $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ una sua base.

Sia $w_1=v_1+v_2$, $w_2=-5v_1+2v_2$ e $W=\mathrm{Span}\{w_1,w_2\}$

a) Dimostrare che $\{w_1,w_2\}$ è una base di W

b) Determinare se $v_1\in W$ e se $v_1\in W$ determinare le sue coordinate rispetto alla base $\{w_1,w_2\}$ di W.

Svolgimento a)

$\{w_1,w_2\}$ è una base di W se e solo se
1) $W=\mathrm{Span}\{w_1,w_2\}$
2) $\{w_1,w_2\}$ è insieme ~~indipendente~~ indipendente di vettori

1) è vero. Rimane da mostrare che w_1,w_2 sono L.I.

Dobbiamo mostrare che se $\alpha w_1+\beta w_2=0$ allora $\alpha=\beta=0$.

$$\alpha w_1+\beta w_2=0 \iff \alpha(v_1+v_2)+\beta(-5v_1+2v_2)=0 \iff \underbrace{(\alpha-5\beta)v_1+(\alpha+2\beta)v_2}_{0}$$

Siccome v_1 e v_2 sono LI l'ultima equazione è vera se e solo se
$\begin{cases}\alpha-5\beta=0\\ \alpha+2\beta=0\end{cases}$. Questo sistema è equivalente a $\begin{cases}\alpha-5\beta=0\\ 7\beta=0\end{cases}$ cioè $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$

quindi $\alpha w_1+\beta w_2=0 \iff \alpha=0$ e $\beta=0$ e $w_1\, w_2$ sono LI

Metodo alternativo per mostrare che w_1 e w_2 sono LI:

Sia $C_B: V\to\mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare che associa ad ogni $v\in V$ le sue coordinate rispetto alla base B.

Abbiamo $C_B(w_1)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ e $C_B(w_2)=\begin{pmatrix}-5\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Abbiamo visto a lezione che w_1 e w_2 sono LI $\iff C_B(w_1)$ e $C_B(w_2)$ sono L.I.

Siccome

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-5\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ sono L.I. $\left(\text{la matrice } \begin{pmatrix}1&-5\\1&2\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ ha rango } 2\right)$

w_1 e w_2 sono L.I.

Svolgimento b).

$\boxed{v_1 \in W}$ Siccome $w_1 = v_1 + v_2$ e $w_2 = -5v_1 + 2v_2$ sappiamo che

$$W = \text{Span}\{w_1, w_2\} \subset \text{Span}\{v_1, v_2\}$$

Siccome $\dim(\text{Span}\{w_1, w_2\}) = \dim(\text{Span}\{v_1, v_2\}) = 2$

allora $W = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ e $v_1 \in W$.

Coordinate di v_1 rispetto a base $\{w_1, w_2\}$ di W

Le coordinate di v_1 rispetto $\{w_1, w_2\}$ sono quelle coppie di numeri α e β che soddisfano l'equazione

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = v_1.$$

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = v_1 \iff \alpha(v_1 + v_2) + \beta(-5v_1 + 2v_2) = v_1 \iff \ldots$$

$$\Updownarrow$$

$$(\alpha - 5\beta - 1)v_1 + (\alpha + 2\beta)v_2 = 0$$

Siccome v_1 e v_2 sono L.I. l'ultima equazione è equivalente a

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta - 1 = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \alpha - 5\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \alpha - 5\beta = 1 \\ 7\beta = -1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{2}{7} \\ \beta = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

Le coordinate di v_1 rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$ di W sono $\frac{2}{7}$ e $-\frac{1}{7}$.

Esercizio 2

Sia $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare.
Assumiamo che il nucleo $Ker(F)$ di F sia lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\{x+y+z=0$, che 4 sia un autovalore di F e che $V_4 := Span\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}\right\}$ sia il relativo autospazio.

a) Dire se F è diagonalizzabile. Se sì, indicare una base di autovettori e i corrispondenti autovalori

b) Scrivere il polinomio caratteristico di F

c) Calcolare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base canonica

d) Scegliere due autovettori indipendenti u e v e calcolare $F \circ F(5u-2v)$

Svolgimento a)

Se $Ker(F) \neq 0$ $Ker F$ è l'autospazio relativo all'autovalore 0.
Nel nostro caso $Ker F := \left\{\begin{pmatrix}\cancel{x}\\\cancel{y}\\\cancel{z}\end{pmatrix} \text{ t.c. } \cancel{x+y+z} = 0\right\}$.
Cioè (risolvendo il sistema $\{x+y+z=0$) $Ker F = Span\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.
Quindi 0 è autovalore per F e la molteplicità geometrica di 0 è 2.
Inoltre sappiamo che 4 è autovalore per F e la molteplicità geometrica di 4 è 1.
Siccome $2+1=3=\dim \mathbb{R}^3$, l'applicazione lineare F è diagonalizzabile.
Una base di autovettori è $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}\right\}$

Svolgimento b)

La matrice rappresentativa di F rispetto alla base indicata al punto a) è $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di F è quindi

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda&0&0\\0&-\lambda&0\\0&0&4-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2(4-\lambda) = -\lambda^3+4\lambda^2$$

Svolgimento c) Calcolare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base canonica

I metodo

Detta A la matrice rappresentativa di F rispetto alla base canonica e detta M la matrice che ha per colonne gli autovettori ottenuti al punto e) $\left(\text{cioè } M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \right)$ è soddisfatta la seguente uguaglianza $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Quindi $A = M M^{-1} A M M^{-1} = M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} M^{-1}$

Occorre determinare M^{-1}!

Abbiamo $\det(M) = -2$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}{-2} & \dfrac{-\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}{-2} & \dfrac{\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-2} \\[2ex] \dfrac{-\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}}{-2} & \dfrac{\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}{-2} & \dfrac{-\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{-2} \\[2ex] \dfrac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{-2} & \dfrac{-\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{-2} & \dfrac{\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$