

Integrali impropri

Breve ripasso. Useremo la notazione $f \sim g$ per indicare che gli integrali impropri relativi alle due funzioni hanno lo stesso carattere. Diremo che una funzione f è *integrabile* (in senso improprio) su un intervallo semiaperto $[a, b)$ se ne esiste l'integrale improprio

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

ed è un numero reale. Una funzione f è *localmente integrabile* su $[a, b)$ se è integrabile su ogni sotto-intervallo chiuso e limitato di $[a, b)$.

Riportiamo i principali criteri di convergenza, enunciandoli per funzioni definite sull'intervallo $[1, +\infty)$. Gli stessi criteri sono validi per funzioni definite su intervalli semiaperti generali $[a, b)$ o $(a, b]$, con le dovute modifiche.

Teorema. (Criterio del confronto) *Siano $f, g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni localmente integrabili e $0 \leq f \leq g$. Se g è integrabile, allora f è integrabile.*

Teorema. (Criterio del confronto asintotico) *Siano $f, g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni strettamente positive e localmente integrabili. Supponiamo esista $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Allora*

- i) $L \in [0, +\infty)$ e g integrabile $\implies f$ integrabile;
- ii) $L \in (0, +\infty)$, allora g integrabile $\iff f$ integrabile;
- iii) $L \in (0, +\infty]$ e g non integrabile $\implies f$ non integrabile.

Teorema. (della convergenza assoluta) *Sia $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ localmente integrabile. Se $|f|$ è integrabile lo è anche f e si ha*

$$\left| \int_1^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_1^{+\infty} |f(x)| dx.$$

ESEMPI FONDAMENTALI

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{(\log 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x|\log x|^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{(\log 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Esercizi proposti

- 1) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^5\left(\frac{1}{x}\right)}{\log(x^2 + 1) - 2 \log x} dx$$

- 2) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^6\left(\frac{1}{x}\right)}{\log(x^5 + 1) - 5 \log x} dx$$

- 3) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{(x^2)}}{1 + e^{(2x^2)}} dx$$

- 4) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{(x^4)}}{1 + e^{(4x^4)}} dx$$

- 5) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(3 + \sin x)}{\sqrt[4]{x^5 - x^3 + 3}} dx$$

- 6) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(3 + \cos x)}{\sqrt[5]{x^4 - x^3 + 3}} dx$$

- 7) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(2 + \cos^2 x)}{\sqrt[5]{x^6 - x^3 + 3}} dx$$

8) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 \cosh(e^{-x}) + 1}} dx$$

9) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 \cosh(e^{-x}) + 1}} dx$$

10) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{x^5 + \sin(e^x)}} dx$$

11) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[4]{x^7 + \sin(e^x)}} dx$$

12) La funzione

$$\frac{x^2 - 2x}{\sqrt[3]{(x-1)^4} \sqrt[7]{(x-2)^{10}}}$$

è (in senso improprio):

- A integrabile su $(0, 1)$; B non integrabile su $(-1, 0)$;
 C integrabile su $(3, +\infty)$; D integrabile su $(2, 3)$.

13) La funzione

$$\frac{x^2 - x}{\sqrt[5]{(x-1)^8} \sqrt[7]{(x-2)^8}}$$

è (in senso improprio):

- A integrabile su $(0, 1)$; B non integrabile su $(-1, 0)$;
 C integrabile su $(3, +\infty)$; D integrabile su $(2, 3)$.

14) La funzione

$$\frac{e^x - 3}{\sqrt[3]{(x - \log 2)^4} \sqrt[7]{(x - \log 3)^{10}}}$$

è (in senso improprio):

- A integrabile su $(0, \log 2)$; B non integrabile su $(-\log 2, 0)$;
 C integrabile su $(\log 4, +\infty)$; D integrabile su $(\log 3, \log 4)$.

15) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} (1 - x^{\frac{3}{2}})}{\log(1+x)(x^3+1)} dx$$

16) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} (1 + x^{3/2})}{\log(1+x)(x^4+1)} dx$$

17) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} (\sqrt{x} - 1)}{\log(1+x^{3/4})(x^3+1)} dx$$

18) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} (\sqrt{x} + 1)}{\log(1+x^{3/2})(x^4+1)} dx$$

19) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^{((2+x)/x)}}{x^{3/2} \log x} dx$$

20) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^{((2-x)/x)}}{x^{1/2} \log x} dx$$

21) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin t \log t}{t^{9/4}} dt$$

22) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin t \log t}{t^{7/3}} dt$$

23) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{-1} \log(1 - e^x) dx$$

24) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{-1} \log(1 + e^{2x}) dx$$